数学牧場

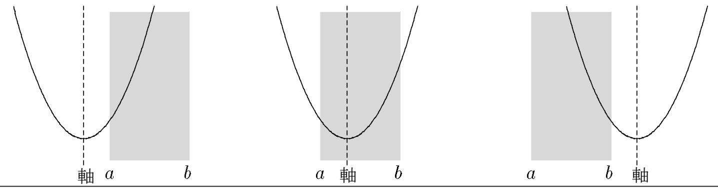
2次関数の場合分け

△▼△

場合分けの基本　下に凸のグラフで，範囲が $a \leqq x \leqq b$ のとき，

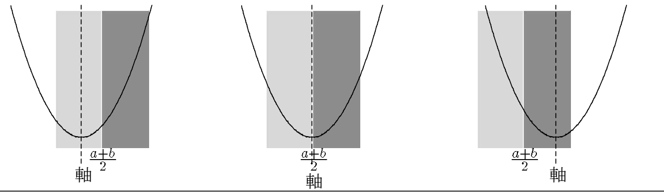
【最小値】 軸が範囲の…

（i）**左外**（軸 $< a$）　（ii）**中**（$a \leqq$ 軸 $< b$）　（iii）**右外**（軸 $\geqq b$）



【最大値】 軸が範囲の中点の…

（i）**左側**（軸 $< \frac{a+b}{2}$）　（ii）**真上**（軸 $= \frac{a+b}{2}$）　（iii）**右側**（軸 $> \frac{a+b}{2}$）



※上に凸のグラフのときは，最小値と最大値の分け方が逆になる。

例 1　$y = (x - a + 1)^2 + a^2 - 2$ の，$-2 \leqq x \leqq 4$ における最大値・最小値の場合分け

➠ 軸は $x = a - 1$，区間の中点は $x = 1$

【最小値】…（i）$a - 1 < -2$ のとき　（ii）$-2 \leqq a - 1 < 4$ のとき　（iii）$a - 1 \geqq 4$ のとき

【最大値】…（i）$a - 1 < 1$ のとき　（ii）$a - 1 = 1$ のとき　（iii）$a - 1 > 1$ のとき

例 2　$y = -(x - 1)^2 + 5$ の，$0 \leqq x \leqq a$ における最大値・最小値の場合分け

➠ 軸は $x = 1$，区間の中点は $x = \dfrac{a}{2}$，グラフが上に凸

【最小値】…（i）$1 < \dfrac{a}{2}$ のとき　（ii）$1 = \dfrac{a}{2}$ のとき　（iii）$1 > \dfrac{a}{2}$ のとき

【最大値】…（i）$1 < 0$ のとき (不適)　（ii）$0 \leqq 1 < a$ のとき (つまり $1 < a$)　（iii）$1 \geqq a$ のとき

例 3　$y = 2(x + 3)^2 - 1$ の，$a \leqq x \leqq a + 4$ における最大値・最小値の場合分け

➠ 軸は $x = -3$，区間の中点は $x = a + 2$

【最小値】…（i）$-3 < a$ のとき　（ii）$a \leqq -3 < a + 4$ のとき　（iii）$-3 \geqq a + 4$ のとき

【最大値】…（i）$-3 < a + 2$ のとき　（ii）$-3 = a + 2$ のとき　（iii）$-3 > a + 2$ のとき

問題 1　次の2次関数の最大値・最小値を求めるための，場合分けをせよ。

(1) $y = (x + a - 2)^2 + a + 3 \quad (1 \leqq x \leqq 5)$

(2) $y = -x^2 + 6x + 1 \quad (a - 2 \leqq x \leqq a)$

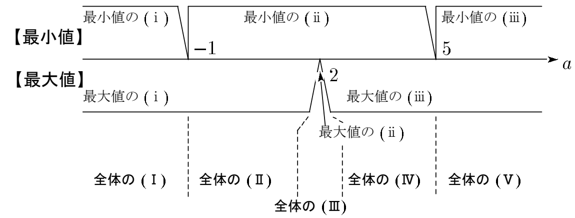
※最大値・最小値を別々に分ける方法を紹介してきたが，これらを同時に (まとめて) 場合分けしなければならないことがある。そのときは，次のような図を書くと便利である。

例 4　左ページの例1において

【最小値】…（i）$a < -1$ のとき　（ii）$-1 \leqq a < 5$ のとき　（iii）$a \geqq 5$ のとき

【最大値】…（i）$a < 2$ のとき　（ii）$a = 2$ のとき　（iii）$a > 2$ のとき

➠ これを図に表すと，下のようになる。



ちょうど「切れ目」が入っているところで分ければよいから，全体をまとめた場合分けは，

（I）$a < -1$ のとき	（II）$-1 \leqq a < 2$ のとき	（III）$a = 2$ のとき
（IV）$2 < a < 5$ のとき	（V）$5 \leqq a$ のとき	

問題 2　左ページの例3の場合分けの，全体をまとめるとどうなるか。