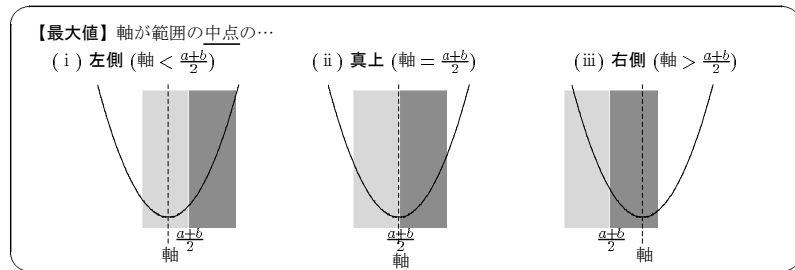
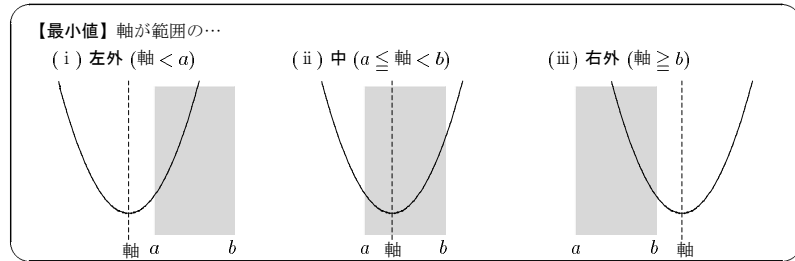


数学牧場

2次関数の場合分け

場合分けの基本

下に凸のグラフで、範囲が $a \leq x \leq b$ のとき、



※上に凸のグラフのときは、最小値と最大値の分け方が逆になる。

例 1 $y = (x - a + 1)^2 + a^2 - 2$ の、 $-2 \leq x \leq 4$ における最大値・最小値の場合分け

→ 軸は $x = a - 1$ 、区間の中点は $x = 1$

【最小値】… (i) $a - 1 < -2$ のとき (ii) $-2 \leq a - 1 < 4$ のとき (iii) $a - 1 \geq 4$ のとき

【最大値】… (i) $a - 1 < 1$ のとき (ii) $a - 1 = 1$ のとき (iii) $a - 1 > 1$ のとき

例 2 $y = -(x - 1)^2 + 5$ の、 $0 \leq x \leq a$ における最大値・最小値の場合分け

→ 軸は $x = 1$ 、区間の中点は $x = \frac{a}{2}$ 、グラフが上に凸

【最小値】… (i) $1 < \frac{a}{2}$ のとき (ii) $1 = \frac{a}{2}$ のとき (iii) $1 > \frac{a}{2}$ のとき

【最大値】… (i) $1 < 0$ のとき (不適) (ii) $0 \leq 1 < a$ のとき (つまり $1 < a$) (iii) $1 \geq a$ のとき

例 3 $y = 2(x + 3)^2 - 1$ の、 $a \leq x \leq a + 4$ における最大値・最小値の場合分け

→ 軸は $x = -3$ 、区間の中点は $x = a + 2$

【最小値】… (i) $-3 < a$ のとき (ii) $a \leq -3 < a + 4$ のとき (iii) $-3 \geq a + 4$ のとき

【最大値】… (i) $-3 < a + 2$ のとき (ii) $-3 = a + 2$ のとき (iii) $-3 > a + 2$ のとき

問題 1 次の2次関数の最大値・最小値を求めるための、場合分けをせよ。

(1) $y = (x + a - 2)^2 + a + 3$ ($1 \leq x \leq 5$)

(2) $y = -x^2 + 6x + 1$ ($a - 2 \leq x \leq a$)

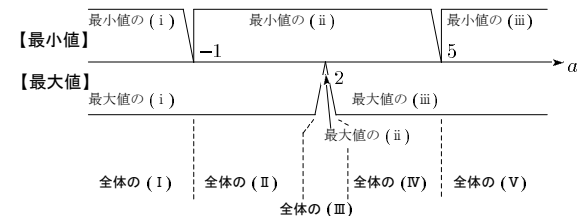
※最大値・最小値を別々に分ける方法を紹介してきたが、これらを同時に(まとめて)場合分けしなければならぬことがある。そのときは、次のような図を書くとう便利である。

例 4 左ページの例 1 において

【最小値】… (i) $a < -1$ のとき (ii) $-1 \leq a < 5$ のとき (iii) $a \geq 5$ のとき

【最大値】… (i) $a < 2$ のとき (ii) $a = 2$ のとき (iii) $a > 2$ のとき

→ これを図に表すと、下のようになる。



ちょうど「切れ目」が入っているところで分ければよいから、全体をまとめた場合分けは、

(I) $a < -1$ のとき (II) $-1 \leq a < 2$ のとき (III) $a = 2$ のとき
(IV) $2 < a < 5$ のとき (V) $5 \leq a$ のとき

問題 2 左ページの例 3 の場合分けの、全体をまとめるとうなるか。