数学牧場

三角形を解く②

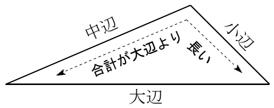
△▼△

そもそも三角形は，1本だけ極端に長い辺があると成立しない。(3辺の長さが 1，1，100 の三角形はかけない。)

つまり，三角形には成立するための条件がある。

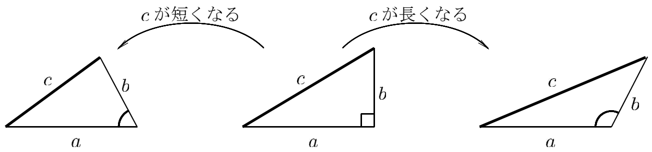
三角形の成立条件

(小辺) + (中辺) > (大辺)



三角形の形状を調べる場合，次の公式を利用すれば「鋭角三角形」,「直角三角形」,「鈍角三角形」の3種類を見分けることができる。

三平方の定理の拡張



鋭角三角形	直角三角形	鈍角三角形
$\boldsymbol{a^2+b^2>c^2}$ 短い	$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$	$\boldsymbol{a^2+b^2<c^2}$ 長い

問題1 3辺の長さが 3，4，a の三角形がある。次の問いに答えよ。

(1) 三角形が成立するための a の値の範囲を求めよ。

(2) 三角形が鋭角三角形になるための a の値の範囲を求めよ。

三角形に関する等式が $\sin A$，$\cos B$ などの三角比 (角情報) を用いて表されているとき，これを a，b，R 等の辺 (長さ情報) を用いた表現に直すことで，三角形の形状が分かりやすくなることがある。

三角形の情報変換（角→長さ）

【正弦定理を利用】 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

これを変形して，$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}}$ の形で利用。

【余弦定理を利用】 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

これを変形して，$\boldsymbol{\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ の形で利用。

※「角情報」を「長さ情報」に変換した結果，例えば次のように形状が分かる。

$a=b$ ··· BC = AC の二等辺三角形

$b^2=c^2+a^2$ ··· $B=90^\circ$ の直角三角形

例 1 $c=2a\cos B$ が成り立つ△ ABC を調べる。

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を，与えられた等式に代入して　$c=2a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$c^2=c^2+a^2-b^2$　　$\therefore a^2=b^2$ より，$a=b$

よって，△ ABC は BC = AC の二等辺三角形

問題2 次の等式を満たす△ ABC はどんな三角形か。

(1) $c\cos B-b\cos C=0$

(2) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

三角比と辺の長さ

△ ABC において，次の等式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C}$$

※ cos や tan では，このような性質は成り立たない。

問題3 △ ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:\sqrt{21}$ のとき，2番目に大きい角の大きさを求めよ。