

数学牧場

条件付き確率②

確率の乗法定理

条件付き確率について、次の式が成り立つことを学習した。

● 確率の乗法定理 ●

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

直訳すると、AかつBの確率は、Aの確率×Bの確率になる、ということである。

右辺は、Aが起こった後、Bがその影響を受けることを考慮して「Aが起こり、かつその条件の下でBが起こる」という表現になっている。

独立

10本のくじの中に、当たりが3本入っている。Aがくじを1本引き、続いてBが1本引く。

(1) Aが引いたくじを元に戻さないとする。

- Aが当たった後、Bが当たりを引く確率 $\cdots P_A(B) =$ _____
- Bが当たりを引く確率 $\cdots P(B) =$ _____

(2) Aが引いたくじを元に戻すとする。

- Aが当たった後、Bが当たりを引く確率 $\cdots P_A(B) =$ _____
- Bが当たりを引く確率 $\cdots P(B) =$ _____

(1) ではくじを元に戻さないで、Aの結果が明らかにBに影響を与えるが、(2) ではくじを元に戻すので、Aの結果はBに何の影響も与えない。つまり、

$$P_A(B) = P(B)$$

であると言える。

この式が成り立つとき、Aが当たるといふ試行と、Bが当たるといふ試行は互いに独立であるという。AとBが互いに独立ならば、確率の乗法定理は次のようになる。

● 確率の乗法定理 (2) ●

2つの試行が独立のとき、その結果起こる事象A、Bについて

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

問題1 1から10までの番号札が入った袋から1枚取り出すという試行をS、1個のサイコロを振るという試行をT、1枚のコインを投げるという試行をUとする。

番号札の数字がサイコロの目よりも小さいときはコインを投げ、大きいときはコインを投げないものとする。

- (1) 試行SとTは互いに独立か。 (2) SとUは互いに独立か。

問題2 赤玉7個、白玉3個が入った袋の中から、まず2個を取り出し、元に戻さないで続けて1個を取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) はじめの2個がともに赤のとき、次の1個が白である確率。
(2) はじめの2個がともに赤で、かつ次の1個が白である確率。

問題3 白玉4個、赤玉2個が入った袋の中から、元に戻さないで1個ずつ、続けて2回玉を取り出す。2回目の玉が赤であるとき、1回目の玉が赤である確率を求めよ。

問題4 Aの袋には赤玉1個、白玉4個が入っており、Bの袋には赤玉4個、白玉1個が入っている。いま、それぞれの袋から玉を2個ずつ同時に取り出し、交換して袋の中に戻した。このとき、Aの袋の中にある赤玉の個数をXとする。

(1) $X=1$ となる確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イウ}}$ であり、 $X=2$ となる確率は $\frac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$ である。

(2) $X=2$ のとき、袋Aから白玉が2個取り出された条件付き確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。