



■ 1 頂点が直線 $y = x - 5$ の上にあるから、頂点の座標は $(p, p - 5)$ とおくことができるので、求める2次関数は $y = a(x - p)^2 + p - 5$ … ① と表せる。

点 $(2, -3)$ を通るので、 $-3 = a(2 - p)^2 + p - 5$ 整理して、 $a(2 - p)^2 = 2 - p$ … ②

点 $(3, 0)$ を通るので、 $0 = a(3 - p)^2 + p - 5$ 整理して、 $a(3 - p)^2 = 5 - p$ … ③

$p \neq 2$ のとき、 $2 - p$ は0ではないから②の両辺を $2 - p$ で割って、 $a(2 - p) = 1$

これより、 $a = \frac{1}{2 - p}$ ③に代入すると、 $\frac{(3 - p)^2}{2 - p} = \frac{5 - p}{2 - p}$

分母をはらい、 $(3 - p)^2 = (5 - p)(2 - p)$

$$9 - 6p + p^2 = 10 - 7p + p^2 \quad \therefore p = 1$$

これより、 $a = 1$ となる。この場合、求める2次関数は $y = (x - 1)^2 - 4$ 。 ($y = x^2 - 2x - 3$)

$p = 2$ のとき、③より $a = 3$ だから、2次関数は $y = 3(x - 2)^2 - 3$ と求まる。

これは問題の条件を満たしているので、答えとして認めてよい。ゆえに、もう1つの答えは $y = 3(x - 2)^2 - 3$ 。 ($y = 3x^2 - 12x + 9$)

注：②より $a(2 - p)^2 - (2 - p) = 0$ なので、左辺を因数分解すると $(2 - p)a(2 - p) - 1 = 0$ このことから自動的に $2 - p = 0$ の場合と、 $a(2 - p) - 1 = 0$ の場合とに分かれる、と考えることもできます。

注：今回は②の両辺が $2 - p$ で割れたので、比較的簡単に解くことができましたが、一般には片方の式を「 $a = \dots$ 」の形に変形し、他方の式に代入して解かなければなりません。3次方程式になりますし、分母についての場合分けも必要ですから、かなり難易度は高くなります。

■ 2 それぞれのグラフの頂点を求めると、

$$y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \text{頂点は} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$y = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \quad \text{頂点は} \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$$

$$\text{よって、} p = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2, \quad q = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(別解) 平行移動の性質を利用してできる。

$$y = f(x) \text{ のグラフを } x \text{ 軸方向に } p, y \text{ 軸方向に } q \text{ だけ平行移動すると, } y - q = f(x - p)$$

$y = x^2 + x + 1$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると

$$y - q = (x - p)^2 + (x - p) + 1$$

整理して、 $y = x^2 + (1 - 2p)x + (p^2 - p + q + 1)$

これが $y = x^2 - 3x + 5$ と一致するから、 $1 - 2p = -3, \quad p^2 - p + q + 1 = 5$

よって、 $p = 2, q = 2$