



## 基本問題を確認しよう

数Ⅱ

不等式の証明

### 不等式の基本性質

①  $a > b, b > c \implies a > c$       ②  $a > b \implies a + c > b + c, \quad a - c > b - c$

③  $c > 0$  のとき,  $a > b \implies ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

④  $c < 0$  のとき,  $a > b \implies ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

絶対不等式 ①  $x$  が実数のとき,  $x^2 \geq 0$       ②  $x, y$  が実数のとき,  $x^2 + y^2 \geq 0$

不等式の平方  $a > 0, b > 0$  のとき,  $a > b \iff a^2 > b^2$

絶対値の大小  $|a| \geq a, \quad |a| \geq -a$

### 相加平均・相乗平均の大小関係

$a > 0, b > 0$  のとき,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$     つまり,  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

① 次の不等式を証明しなさい。

(1)  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(2)  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

②  $a > b, c > d$  のとき, 不等式  $ac + bd > ad + bc$  を証明しなさい。

③  $a > 0, b > 0$  のとき, 不等式  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$  を証明しなさい。

④  $a, b$  が実数のとき,  $|a+b| \leq |a| + |b|$  を証明しなさい。

⑤  $a > 0$  のとき, 不等式  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  を証明しなさい。また, 等号が成り立つのはどのようなときですか。