応用問題に挑戦

数B　ベクトルの平行，分解

■1　$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=4\vec{b}-2\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=3\vec{a}-\vec{b}$とするとき，次のことを証明しなさい。

(1) AB // CD

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{b}-\vec{a}-2\vec{a}=-3\vec{a}+3\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=3\vec{a}-\vec{b}-(4\vec{b}-2\vec{a})$

$=5\vec{a}-5\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ と表せるので，$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$

つまり，AB // CD

(2) 3点A，B，Cは同一直線上にある。

(1)より，$\overrightarrow{AB}=-3\vec{a}+3\vec{b}$

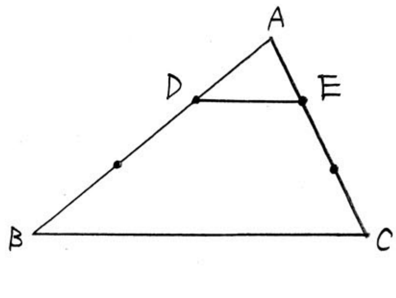
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=4\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{a}$

$=-4\vec{a}+4\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{AC}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$

よって，3点A，B，Cは同一直線上にある。

■2　△ABCの辺AB，ACを3等分する点のうち，Aに近い方をそれぞれD，Eとする。このとき，DE // BC，DE $=\frac{1}{3}$BCであることを証明しなさい。



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$

これより，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ であるから

$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$，$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore$ DE // BC，DE $=\frac{1}{3}$BC