応用問題に挑戦

数B　ベクトルの平行，分解

■1　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\vec{b} - \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 4\vec{b} - 2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 3\vec{a} - \vec{b}$ とするとき，次のことを証明しなさい。

(1) AB // CD

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{b} - \vec{a} - 2\vec{a} = -3\vec{a} + 3\vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 3\vec{a} - \vec{b} - (4\vec{b} - 2\vec{a})$

$= 5\vec{a} - 5\vec{b}$

$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ と表せるので，$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

つまり，AB // CD

(2) 3点A，B，Cは同一直線上にある。

(1)より，$\overrightarrow{AB} = -3\vec{a} + 3\vec{b}$

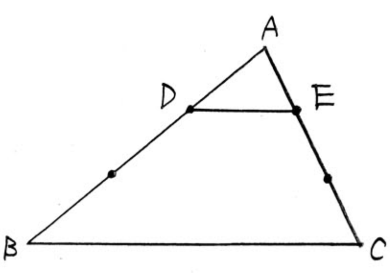
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 4\vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{a}$

$= -4\vec{a} + 4\vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$

よって，3点A，B，Cは同一直線上にある。

■2　△ABCの辺AB，BCを3等分する点のうち，Aに近い方をそれぞれD，Eとする。このとき，DE // BC，$\mathrm{DE} = \frac{1}{3}\mathrm{BC}$ であることを証明しなさい。



$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$

これより，$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ であるから

$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$，$|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore$ DE // BC，$\mathrm{DE} = \frac{1}{3}\mathrm{BC}$