

※角度を2倍や半分にすると、三角関数の値はどうなるのだろうか。

2倍角の公式

角 α の2倍角 2α について、例えば $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$ と考えると、加法定理から、以下の公式が得られる。

● 2倍角の公式 ●

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

3. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

例題1 3倍角の公式を導け。(ヒント: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$)

$\sin 3\alpha =$ _____

$\cos 3\alpha =$ _____

例題2 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、方程式 $\cos 2\theta + \sin \theta - 1 = 0$ を満たす θ の値を求めよ。
(吉教科書 p.73 問10)

2倍角の公式より、 $\cos 2\theta =$ _____ (sin だけの式)

であるから、元の式に代入すると、

_____ $+ \sin \theta - 1 = 0$

\therefore _____ $= 0$

例題 3 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、関数 $y = \cos 2\theta + 2 \cos \theta - 1$ の最大値と最小値を求めよ。

(吉教科書 p.74 例題 4)

半角の公式

2倍角の公式 2. より、

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdots \cdots \textcircled{1}$$

または

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ である。この式の α を、 $\frac{\alpha}{2}$ に置き換えると、次の半角の公式が得られる。

●半角の公式●

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

例題 4 半角の公式を用いて、 $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 22.5^\circ$ を求めよ。