1年数学予習シート　■ 三角関数の合成 ■　3－3

三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のように，2 種類の三角関数の混ざった式は，sin だけを用いた式に直すことができる。この変形を三角関数の**合成**という。

例 1　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

与式は

$$1\cdot\sin\theta + \sqrt{3}\cdot\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

と見ることができるが，これは加法定理の右辺

$$\cos\alpha\cdot\sin\theta + \sin\alpha\cdot\cos\theta$$

に形が似ている。
そこで，1 と $\sqrt{3}$ の部分が $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ となるように変形しよう。①の式から強引に 2※ をくくり出すと

$$
\begin{aligned}
& 2\left(\boxed{\quad}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\
= \; & 2\left(\cos\boxed{\quad}^\circ\sin\theta + \sin\boxed{\quad}^\circ\cos\theta\right) \\
= \; & 2\sin\left(\theta + \boxed{\quad}^\circ\right)
\end{aligned}
$$

と合成できる。

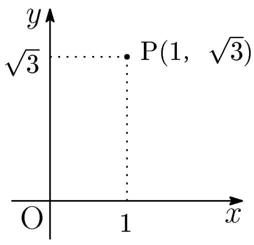
合成を行う機械的な手順

式を合成するときは，次のような手順を用いると早くできる。

例 2　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

① sin，cos の係数を組にする。…… $(\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{3}})$

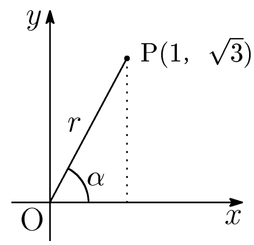
② 上の数字の組を座標だと思って，座標平面上にとる(点 P と名付けておく)。



③ OP の長さ r と，OP の表す角 α を求める。

$r^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$ より　　$r = 2$

$1 : 2 : \sqrt{3}$の比の直角三角形より　　$\alpha = 60^\circ$

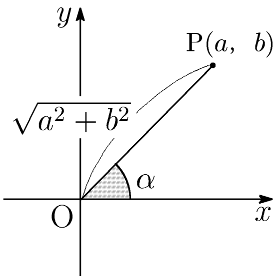


④ ③で求めた r，α を，$r\sin(\theta+\alpha)$ に代入して完成。 ……$\mathbf{2}\sin(\theta+\mathbf{60^\circ})$

$$\therefore \underline{\underline{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin(\theta+60^\circ)}}$$

● 重要 **三角関数の合成**●

$$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$



ただし，α は，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角。

例題1 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。 (吉教科書 p.76　問 12)

(1) $\sin\theta+\cos\theta$ (2) $-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

(3) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ (4) $3\sin\theta+4\cos\theta$

例題2 次の関数の最大値と最小値を求めよ。 (吉教科書 p.76　例題 5)

$$y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$$

※なぜ 2 なのだろうか？