

分数の指数

指数法則は、正、0、負の整数について成り立つことを確かめた(吉シ3-5)が、 $\frac{2}{3}$ や $\frac{1}{2}$ などの有理数についても成り立つように、うまく定義できないだろうか。

例 1 $a^{\frac{2}{3}} = ?$

指数法則が有理数のときにも成り立つことにすると

$$(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\boxed{\quad}} = a^2$$

つまり、

$a^{\frac{2}{3}}$ は、 \quad 乗すると a^2 になる数 (a^2 の \quad 乗根)

であるから、

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[\boxed{\quad}]{\boxed{\quad}}$$

と書くことができそうである。

したがって、分数の指数については、「分子の数字」乗したのち、「分母の数字」乗根をとると考えればよく、次のように定める。

● 分数の指数 ●

$a > 0$ で、 m が整数、 n が正の整数のとき、

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

例題 1 次の値を求めよ。

(吉教科書 p.87 問8)

(1) $100^{\frac{1}{2}}$

(2) $25^{-\frac{1}{2}}$

(3) $8^{-\frac{2}{3}}$

(4) $16^{0.75}$

指数法則は、指数が有理数のときにも成り立つ。これで、指数法則は正、0、負、分数、小数など、ほとんどの数について成立することが確かめられ、法則として完成する。

● 指数法則 (完結編) ●

* $a > 0$, $b > 0$ で、 p , q が有理数のとき

1 $a^p a^q = a^{p+q}$

2 $(a^p)^q = a^{pq}$

3 $(ab)^p = a^p b^p$

4 $a^p \div a^q = a^{p-q}$

5 $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

例題2 次の式を簡単にせよ。

(吉教科書 p.88 問 10)

(1) $1024^{\frac{1}{10}}$

(2) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{3}{2}}$

(3) $9^{\frac{5}{6}} \times 9^{-\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{1}{3}}$

例題3 $a > 0, b > 0$ のとき、次の式を簡単にせよ。

(吉教科書 p.88 問 11)

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} \div \sqrt{a}$

(2) $\sqrt[3]{ab} \div \sqrt[6]{ab^5} \times \sqrt{ab}$

指数法則はほとんどの数について成立する、と左に書いたが、例えば有理数でない数(無理数)の指数($a^{\sqrt{2}}$ のようなもの)については、まだ学習していない。高校で学習する予定もない。

ただ、このような無理数についても、累乗は考えることができ、指数法則が成立することが知られている。

したがって指数法則は、あらゆる実数の指数について成立する法則である、ということだけ知っていて欲しい。

=====

[MEMO]