

絶対値を含んだ方程式・不等式には、大きく分けて3種類の解き方がある。それぞれによいとこ悪いところがあるので、問題によってうまく使い分けられるようにマスターしておこう。

距離法 … 絶対値とはそもそも、距離を意味するものであった。

● 距離としての絶対値 ●

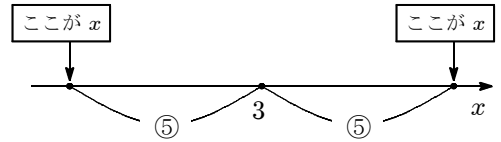
数直線上に、点 $X(x)$, $A(a)$ があつたとすると、

$|x|$ …… 原点 O と点 X との距離

$|x - a|$ …… 点 A と点 X との距離

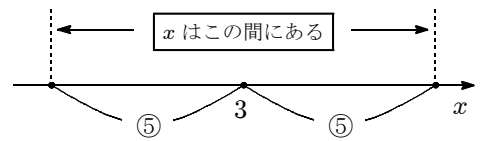
例 1 $|x - 3| = 5$

(解) 数直線上で、座標が3になる点から、 x になる点までの距離が5であるから、
図より、 $x = -2, 8$ (答)



例 2 $|x - 3| < 5$

(解) 数直線上で、座標が3になる点から、 x になる点までの距離が5より短い範囲なので、
図より、 $-2 < x < 8$ (答)



【距離法の欠点】

複雑な絶対方程式・不等式になったとき、図を利用して解くことが難しくなる。

例えば、 $|x + 1| = 3x - 1$, $|x| + |x + 1| \leq 5$ といった、複雑な形式の方程式・不等式の場合は、距離だけで考えていくのは苦しい。

直接法 … 次の性質を覚えておくと、すばやく計算ができる。

● 絶対値と方程式・不等式 ●

[方程式] $|x| = a \iff x = \pm a$

[不等式] $|x| < a \iff -a < x < a$ $|x| > a \iff x < -a, a < x$

例 3 $|x - 3| = 5$

(解) $x - 3 = \pm 5$ なので、 $x = 3 \pm 5$ \therefore $x = -2, 8$ (答)

例 4 $|x - 3| < 5$

(解) $-5 < x - 3 < 5$ なので、 $\begin{cases} -5 < x - 3 \\ x - 3 < 5 \end{cases}$

これより、 $-2 < x$ かつ $x < 8$ だから、 $-2 < x < 8$ (答)

※ 不等号が \leq や \geq となつていても、やり方はまったく同じである。

場合分け法

絶対値記号を使う場合、中身が正なのか負なのかが問題となる。下のような性質があった。

● 絶対値の2つの場合 ●

$$a \geq 0 \text{ のとき } |a| = a \qquad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

例えば $|x-3|$ という式の場合、中身が正なのか負なのかハッキリしないから、絶対値記号を外すことができない。しかし、あらかじめ x が 3 よりも大きな数であることが分かっていたとしたらどうだろう？ この場合は、「 $x-3$ 」という式は必ず正の数になるから、絶対値記号を外すことができるはずである。つまり、

もしも $x \geq 3$ ならば、中身は $x-3 \geq 0$ だから、 $|x-3|$ は $x-3$ と等しい

といえることになる。

もしも「A」だったら「こんな結果」になる、もしも「B」だったら「あんな結果」になる、という風に、状況を自分で分類して問題を解くことを、**場合分け**という。

では、この場合分けを利用した解答を紹介しよう。

例 5 $|x-3|=5$

(解) (i) もしも $x-3 \geq 0$ だったら (つまり、 $x \geq 3$ だったら)、
左辺の絶対値記号が外れて、 $x-3=5$ となるから、 $x=8$
今、 $x \geq 3$ という前提で考えていたから、この答えは適しているといえる。

(ii) もしも $x-3 < 0$ だったら (つまり、 $x < 3$ だったら)、
左辺の絶対値記号が外れて、 $-(x-3)=5$ となるから、 $-x+3=5$ より、 $x=-2$
今、 $x < 3$ という前提で考えていたから、この答えは適しているといえる。
以上2つの場合から、 $x=-2, 8$ (答)

例 6 $|x-3| < 5$

(解) (i) もしも $x-3 \geq 0$ だったら (つまり、 $x \geq 3$ だったら)、
左辺の絶対値記号が外れて、 $x-3 < 5$ となるから、 $x < 8$
今、 $x \geq 3$ という前提で考えていたから、それを合わせると $3 \leq x < 8$

(ii) もしも $x-3 < 0$ だったら (つまり、 $x < 3$ だったら)、
左辺の絶対値記号が外れて、 $-(x-3) < 5$ となるから、 $-x+3 < 5$ より、 $x > -2$
今、 $x < 3$ という前提で考えていたから、それを合わせると $-2 < x < 3$
以上2つの場合から、 $-2 < x < 3$ 、 $3 \leq x < 8$
これは範囲としてつながっているので、まとめると $-2 < x < 8$ (答)

【場合分け法の欠点】

単純な絶対方程式・不等式のときは、かえってややこしくなってしまう。

【場合分け法の利点】

どんなに複雑で変わった形の絶対方程式・不等式でも解くことができる。万能な方法。

問題 1 絶対不等式 $|x-3| > 5$ を、このプリントで紹介した3つの方法を使って解け。