2年数学予習シート　■数学的帰納法 (2) ■　1 − 2

例 1 n が 4 以上の自然数のとき，次の不等式を証明せよ。　(吉教科書 p.87　例題 2)

$$2^n > n + 10$$

[証明]　与えられた不等式を①とおき，数学的帰納法によって証明する。

(I)　$n = 4$ のとき，

(左辺)= ＿＿＿＿＿＿＿＿，　(右辺)= ＿＿＿＿＿＿＿＿

よって，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ であるから，①は成り立つ。

(Ⅱ)　$k \leqq 4$ として，

$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると，

$$2^k > k + 10$$

したがって，この式の両辺に 2 をかけると，

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k + 10)$$

また，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

より，$2(k + 10) > (k + 1) + 10$

だから，$2^{k+1} > (k + 1) + 10$

よって，①は $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

(I)，(Ⅱ) より，①は 4 以上のすべての自然数 n について成り立つ。

問題1　n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式を証明せよ。　(吉教科書 p.87　問 2)

$$3^n > 2n + 1$$

問題2　n が 4 以上の自然数のとき，次の不等式を証明せよ。　(吉教科書 p.87　練習 2)

$$2^n > n^2$$

例 2 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4n - a_n$ (n=1，2，3，……)
で定義される数列 $\{a_n\}$ について，a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。　(吉教科書 p.88　例題 3)

[証明]

これから，a_n は次のようになると推定される。

$a_n =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿　……… ①

すべての自然数 n について①が正しいことを証明する。

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，①はすべての自然数について正しい。

問題3 $a_1 = 2$，$a_n + a_{n+1} = 2n + 3$ (n =1，2，3，……)
で定義される数列 $\{a_n\}$ について，a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。　(吉教科書 p.88　問 3)