ベクトルのなす角

内積を利用して，ベクトルのなす角を求めることができる。

● ベクトルのなす角 ●

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

例 1 $\vec{a} = (1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ 1)$ のなす角

なす角を θ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから，必要な数値を求めて代入する。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 5$　　$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$　　$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

よって，$5 = \sqrt{5}\sqrt{10}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　ゆえに，$\theta = 45^\circ$

※この例のような方法で求めるならば，上に挙げた公式は覚えなくてもよいことになる。

問題1 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。　(吉教科書 p.24　問 20)

(1) $\vec{a} = (2,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 3)$　　(2) $\vec{a} = (1,\ -\sqrt{3})$，$\vec{b} = (-\sqrt{3},\ 3)$

(3) $\vec{a} = (-3,\ 4)$，$\vec{b} = (4,\ 3)$　　(4) $\vec{a} = (-2,\ 0)$，$\vec{b} = (\sqrt{2},\ -\sqrt{6})$

問題2 $\vec{a} = (-2,\ 5)$，$\vec{b} = (4,\ x)$ が垂直であるとき，x の値を求めよ。　(吉教科書 p.24　問 21)

問題3 $\vec{a} = (-1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ -1)$ に対して，$\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直になるように，t の値を求めよ。

(吉教科書 p.24　練習 3)

内積の計算法則

ベクトルの内積については，次の計算法則が成り立つ。

● 内積の計算法則 ●

$\boxed{1}$　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\boxed{3}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\boxed{4}$　$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

問題4　等式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$ を証明せよ。　(吉教科書 p.25　問 23)

問題5　$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 3$，$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{6}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。　(吉教科書 p.26　問 24)