ド・モアブルの定理

複素数を n 乗すると，偏角が n 倍される。

● ド・モアブルの定理 重要 ●

n が整数のとき，$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

※上の定理が成り立つことを説明せよ。

問題1 次の計算をせよ。 (吉教科書 p.97　問 13)

(1) $(1+i)^8$　(2) $(-1+\sqrt{3}i)^6$　(3) $(\sqrt{3}-i)^{-8}$

1 の n 乗根

n を自然数とするとき，方程式 ＿＿＿＿＿＿＿＿ の解を，**1 の n 乗根** という。

例 1 1 の 3 乗根

1 の 3 乗根は，$z^3=1$ をみたす。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ (r>0,\ 0^\circ \leqq \theta < 360^\circ) \cdots$ ①　とおくと，ド・モアブルの定理より

$$(\text{左辺}) = z^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$
$$(\text{右辺}) = 1 = 1\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

よって①より，$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$

両辺を比較して，$r^3=1$，　$3\theta = 0^\circ + 360^\circ \times k$ (k は整数)

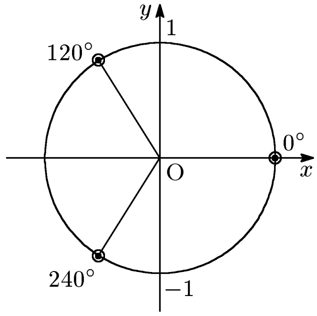
つまり，$r=1$，　$\theta = 0^\circ + 120^\circ \times k$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ だから，$k=0$，1，2。すなわち，$\theta = 0^\circ$，120°，240°。

よって①より，

$$z = 1\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ),$$
$$1\cdot(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ),$$
$$1\cdot(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ),$$

$$\therefore\quad z = 1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$



※ 1 の 3 乗根は，右の図のように，複素数平面の単位円周上に均等に並んでいる。

一般に，1 の n 乗根は複素数平面の単位円周上に，0° の位置を出発点として，均等に並んでいる。

● 1 の n 乗根 ●

1 の n 乗根は，$w_k = \cos\left(\dfrac{360^\circ}{n} \times k\right) + i\sin\left(\dfrac{360^\circ}{n} \times k\right)$　$(k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1)$

これらは原点を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 1 を 1 つの頂点とする正 n 角形の頂点である。

問題2　(1) 1 の 8 乗根を求めよ。　(吉教科書 p.99　問 15)

(2) 8 の 3 乗根を求めよ。　(吉教科書 p.99　練習 4)

問題2　次の方程式を解け。　(吉教科書 p.99　問 16)

(1) $z^2 = i$　(2) $z^4 = -16$　(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$