※今回の内容は一部，教科書と説明方法，順序を変えてあります。

負の数の平方根

虚数単位 i は $i^2 =$ ＿＿＿ を満たす数の1つであったから，$i = \sqrt{-1}$ である。このことを利用すると，

$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$　　$\sqrt{-4} =$ ＿＿＿＿＿＿　　$\sqrt{-5} =$ ＿＿＿＿＿＿

のように，負の数の平方根はすべて，i を用いて表すことができる。

● 負の実数の平方根 $\sqrt{-k}$ ●

$k > 0$ のとき，$\boldsymbol{\sqrt{-k} = \sqrt{k}i}$

問題1 次の計算をせよ。 (吉教科書 p.72　問 7)

(1) $\sqrt{-4} + \sqrt{-25}$　(2) $\sqrt{-6}\sqrt{-3}$　(3) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$　(4) $(\sqrt{-2} + \sqrt{-18})(\sqrt{-2} - \sqrt{-18})$

注　負の数の平方根では $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$，$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ という性質は**成り立たない。**

$\sqrt{-k}$ という平方根を見たら，すぐに $\sqrt{k}i$ に変形するようにしよう。

2次方程式の解

実数の範囲では $x^2 = -3$ のような簡単な2次方程式ですら解くことができなかったが，複素数の範囲では解くことができる。

$x^2 = -3$ より，$x = \pm\sqrt{-3}$　　$\therefore x = \pm\sqrt{3}i$

問題2 次の方程式を解け。 (吉教科書 p.72　問 6)

(1) $x^2 = -9$　(2) $x^2 + 8 = 0$　(3) $4x^2 + 3 = 0$　(4) $(x-1)^2 + 5 = 0$

実数の範囲で解くことができない 2 次方程式とは，判別式 D が負になる 2 次方程式であった。

そもそも判別式というのは，$ax^2+bx+c=0$ を解の公式で解いたときの，ルートの中身のことであるから，それが負になってしまうと，実数の範囲で「解なし」となるのは当然である。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\boldsymbol{b^2-4ac}}}{2a}$$ 判別式 D

しかし，ルートの中身が負になる場合，つまり，負の数の平方根は，複素数の範囲で考えることができる。すなわち，**複素数の範囲で考えれば，どんな 2 次方程式でも解くことができる**ことになる。

例 1　$x^2+x+3=0$

解の公式より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$　(今まではこの時点で,「解なし」と宣言していた)

負の平方根を虚数単位 i を用いて表して，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}\ \cdots\ (\text{答})$$

今後はどんな 2 次方程式も解をもつので，制限なしに，次の解の公式が成り立つ。

● 2 次方程式の解の公式 ●

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

とくに，x の係数 b が偶数のときは，(すなわち，$b=2b'$ のときは)

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

問題3　次の 2 次方程式を解け。　(吉教科書 p.73，4　問 8，9)

(1)$3x^2-5x-2=0$　(2)$5x^2+2x+3=0$　(3)$3x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

(4)$x(x-3)=-6$　(5)$x^2+4x-1=0$　(6)$3x^2-4x+5=0$