

※今回の内容は一部、教科書と説明方法、順序を変えてあります。

### 負の数の平方根

虚数単位  $i$  は  $i^2 = \underline{\hspace{2cm}}$  を満たす数の1つであったから、 $i = \sqrt{-1}$  である。このことを利用すると、

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = \sqrt{3}i \quad \sqrt{-4} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{-5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

のように、負の数の平方根はすべて、 $i$  を用いて表すことができる。

### ● 負の実数の平方根 $\sqrt{-k}$ ●

$$k > 0 \text{ のとき, } \sqrt{-k} = \sqrt{k}i$$

### 問題1 次の計算をせよ。

(吉教科書 p.72 問7)

$$(1) \sqrt{-4} + \sqrt{-25} \quad (2) \sqrt{-6}\sqrt{-3} \quad (3) \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} \quad (4) (\sqrt{-2} + \sqrt{-18})(\sqrt{-2} - \sqrt{-18})$$

注 負の数の平方根では  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$  という性質は成り立たない。  
 $\sqrt{-k}$  という平方根を見たら、すぐに  $\sqrt{k}i$  に変形するようにしよう。

### 2次方程式の解

実数の範囲では  $x^2 = -3$  のような簡単な2次方程式ですら解くことができなかつたが、複素数の範囲では解くことができる。

$$x^2 = -3 \text{ より, } x = \pm\sqrt{-3} \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}i$$

### 問題2 次の方程式を解け。

(吉教科書 p.72 問6)

$$(1) x^2 = -9 \quad (2) x^2 + 8 = 0 \quad (3) 4x^2 + 3 = 0 \quad (4) (x-1)^2 + 5 = 0$$

実数の範囲で解くことができない2次方程式とは、判別式  $D$  が負になる2次方程式であった。

そもそも判別式というのは、 $ax^2 + bx + c = 0$  を解の公式で解いたときの、ルートの中身のことであるから、それが負になってしまうと、実数の範囲で「解なし」となるのは当然である。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leftarrow \text{判別式 } D$$

しかし、ルートの中身が負になる場合、つまり、負の数の平方根は、複素数の範囲で考えることができる。すなわち、**複素数の範囲で考えれば、どんな2次方程式でも解くことができることになる。**

**例 1**  $x^2 + x + 3 = 0$

解の公式より、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$  (今まではこの時点で、「解なし」と宣言していた)  
負の平方根を虚数単位  $i$  を用いて表して、

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2} \dots (\text{答})$$

今後はどんな2次方程式も解をもつので、制限なしに、次の解の公式が成り立つ。

● **2次方程式の解の公式** ●

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

とくに、 $x$  の係数  $b$  が偶数のときは、(すなわち、 $b = 2b'$  のときは)

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

**問題3** 次の2次方程式を解け。

(吉教科書 p.73, 4 問 8, 9)

(1)  $3x^2 - 5x - 2 = 0$

(2)  $5x^2 + 2x + 3 = 0$

(3)  $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

(4)  $x(x - 3) = -6$

(5)  $x^2 + 4x - 1 = 0$

(6)  $3x^2 - 4x + 5 = 0$