2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 次式 ax^2+bx+c は

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

のように因数分解できる。

例 1

① $x^2-2x-3=0$ の解は $x=-1$，3 だから，$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

② $2x^2-3x-1=0$ の解は $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ だから，$2x^2-3x-1=2\left(x-\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$

※因数分解の問題で「実数の範囲で因数分解せよ」という指示があれば，②の様な状態にまで因数分解しなければならない。
　しかし，特に指示がなければ，無理して ($\sqrt{\ }$ が混じるような) 因数分解をする必要はない。

2 次方程式は，複素数の範囲まで考えると必ず解を持つから，2 次式は，複素数の範囲で必ず因数分解できる。

例 2

① $x^2+1=0$ の解は $x=\pm i$ だから，$x^2+1=(x-i)(x+i)$

② $x^2-2x+5=0$ の解は $x=$ ＿＿＿＿＿ だから，$x^2-2x+5=(x-$ ＿＿＿＿＿ $)(x-$ ＿＿＿＿＿ $)$

※例 1 と同じく,「複素数の範囲で因数分解せよ」という指示があれば，上の様な状態にまで因数分解しなければならない。
　しかし，特に指示がなければ，無理して ($\sqrt{\ }$ や i が混じるような) 因数分解をする必要はない。

問題 1　複素数の範囲まで考えて，次の式を因数分解せよ。　(吉教科書 p.80　問 18)

(1) $2x^2+5x-1$　　(2) $3x^2-10x+9$　　(3) x^2+4

2 数を解とする 2 次方程式

x^2 の係数が 1 である 2 次方程式があり，その解が α，β だとすると，

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

という状態になっているはずである。これを展開して，

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

つまり，

$$\boldsymbol{x^2-(\text{和})x+(\text{積})=0}$$

という形になっている。

● 2数を解とする2次方程式 重要 ●

α，β を解とする2次方程式は $\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$ である。

例 3

① -2 と 4 を解とする2次方程式は，$x^2-(\text{和})x+(\text{積})=0$ より，$x^2-(-2+4)x+(-2\cdot 4)=0$

$\therefore x^2-2x-8=0$

② $3+2\sqrt{2}$ と $3-2\sqrt{2}$ を解とする2次方程式は，$x^2-(\text{和})x+(\text{積})=0$ であり

和は $(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=$ ＿＿＿＿

積は ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

よって，求める2次方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題2 次の2数を解とする2次方程式をつくれ。 (吉教科書 p.81　問 19)

(1) 0.5，-0.75　　(2) $2\pm\sqrt{3}$　　(3) $3\pm i$

問題3 2次方程式 $x^2+x+3=0$ の解を α，β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を2つの解とする2次方程式をつくれ。 (吉教科書 p.81　問 20)

ヒント：求める2次方程式は $x^2-(\text{和})x+(\text{積})=0$，つまり $x^2-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{1}{\alpha\beta}=0$ である。さて，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=?$，$\alpha\beta=?$