

高次方程式

※ _____ 次以上の方程式を、**高次方程式**という。

高次方程式を解くのは容易ではないが、因数分解ができるなどの特殊なものに限って、簡単に解くことができる。

例 1 ① $x^3 - 1 = 0$

因数分解すると $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ となるから、 $x = 1$ または $x^2+x+1 = 0$ 。

よって $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 。

② $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

因数分解すると $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ となるから、 $x = 1, 2, 3$

③ $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

因数分解が容易でなく、簡単には解けない。

問題 1 次の方程式を解け。

(吉教科書 p.85 問 28)

(1) $x^3 + 1 = 0$

(2) $x^3 - 27 = 0$

(3) $x^4 = 1$

問題 2 次の方程式を解け。

(吉教科書 p.86 問 30)

(1) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(2) $2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$

(3) $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$

(4) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$

問題3 次の方程式を解け。

(1) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

(2) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$

問題4 $1 - i$ が方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ の解となるように、実数 a, b の値を定めよ。また、他の解を求めよ。
(吉教科書 p.87 問 32)

1の3乗根

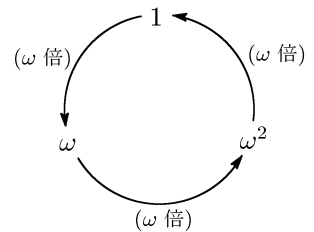
3乗して1になる数を、**1の3乗根**という。

複素数の範囲では、1の3乗根は1, $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ の3つである。

ここで、中央の数 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ を ω とおくと、

$\omega^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $\omega^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

となる。すなわち、1の3乗根はこの記号を用いて、1, ω , ω^2 と表される。



問題5 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ として、次の関係式が成り立つことを示せ。

(1) $\omega^3 = 1$

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(3) $\omega^4 = \omega$

(4) $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$