無限数列

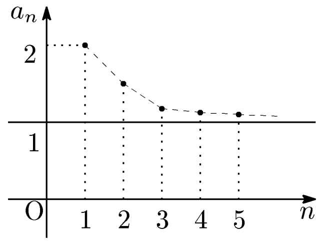
項が限りなく続く数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots$, a_n, $\cdots\cdots$ を ＿＿＿＿＿＿ という。a_n を第 n 項または ＿＿＿＿＿＿ といい，上の数列を $\{a_n\}$ と表す。

n を限りなく大きくすると，第 n 項 a_n の値がどのようになっていくか調べよう。

n を限りなく大きくすることを $\boldsymbol{n \to \infty}$ と表す。記号「∞」は ＿＿＿＿＿＿ と読み,「限りなく大きな数」という意味がある。

数列の極限

① 収束する

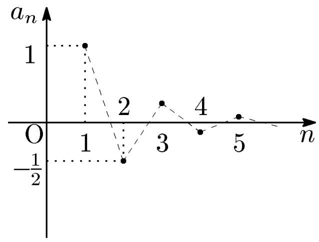


例 1 数列 $\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\cdots\cdots$, $\dfrac{n+1}{n}$, $\cdots\cdots$ の極限

$\left(\text{一般項は } a_n = \dfrac{n+1}{n}\right)$

n が大きくなればなるほど，$\dfrac{n+1}{n}$ の値は 1 に近づいていく。

つまり，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to 1$。



例 2 数列 1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots\cdots$, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\cdots\cdots$ の極限

$\left(\text{一般項は } a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

n が大きくなればなるほど，$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ の値は $\boxed{}$ に近づいていく。

つまり，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to \boxed{}$。

問題 1 数列 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{5}{6}$, $\cdots\cdots$, $\dfrac{2n-1}{2n}$, $\cdots\cdots$ の極限の様子を調べよ。 (➡教科書 p.30　問 1)

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to \alpha$(定数) となるならば，$\{a_n\}$ は α に ＿＿＿＿＿＿ するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または,} \quad n \to \infty \text{ のとき} \quad a_n \to \alpha$$

と表す。このとき，定数 α を数列 $\{a_n\}$ の ＿＿＿＿＿＿ という。

例 3
- $a_n = \dfrac{1}{n}$ について，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to 0$。つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ について，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to \boxed{}$。つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \boxed{}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{}$

② 発散する

一定の値に収束しない数列は, ＿＿＿＿＿＿ するという。このような数列には大きく分けて 3 つのパターンがある。

例 4 数列 $1,\ 4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ n^2,\ \cdots\cdots$

$n \to \infty$ のとき，$a_n = n^2$ の値は ____________________。よって収束しない。

このような数列は**正の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または，} \quad n \to \infty \text{ のとき } \quad a_n \to \infty$$

と表す。

例 5 数列 $1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \cdots\cdots,\ 2-n,\ \cdots\cdots$

$n \to \infty$ のとき，$a_n = 2-n$ は負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる。よって収束しない。

このような数列は**負の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{} \quad \text{または，} \quad n \to \infty \text{ のとき } \quad a_n \to \boxed{}$$

と表す。

例 6 数列 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ (-1)^n,\ \cdots\cdots$ や，数列 $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots\cdots$ は $n \to \infty$ のとき，一定の値に収束しないので，発散する数列である。

しかし，正の無限大にも，負の無限大にも発散しない。このような数列は __________ するという。lim を用いて表現できない。

● 無限数列 $\{a_n\}$ の極限 ●

数列の極限
- 収束する ……………… $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$(定数)
- 発散する
  - 正の無限大に発散 … $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
  - 負の無限大に発散 … $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
  - 振動する

問題2 次の数列の極限を調べよ。 (➡教科書 p.32　問 3)

(1) $-2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 3n-5,\ \cdots\cdots$　　(2) $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{n^2},\ \cdots\cdots$

問題3 次のような一般項をもつ数列の極限を調べよ。 (➡教科書 p.32　練習 1)

(1) $4n-3$　　(2) $\sqrt{n+1}$　　(3) $1+(-1)^n$　　(4) $(-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$