2年数学予習シート　■連続関数■

関数の連続性

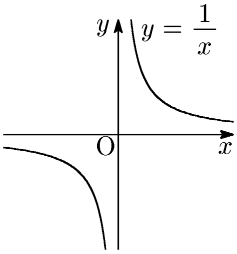
関数 $y=f(x)$ のグラフが，$x=a$ となる地点で「つながっている」とき，関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{x=a}$ **で連続** であるという。

ある区間におけるすべての点で連続である場合は，関数 $f(x)$ は**区間で連続**であるという。

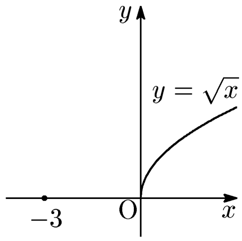
連続であることを条件として表現すると，次のようになる。

● 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるための条件 ●

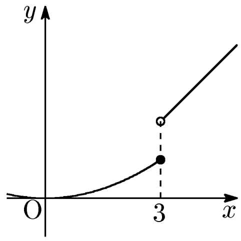
1. $x=a$ は $f(x)$ の定義域に属する。
2. 極限値 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在する。($\Longleftrightarrow$ 右極限 = 左極限)
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ。



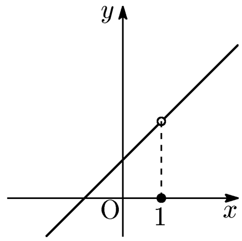
[図 1-1]



[図 1-2]



[図 2]



[図 3]

1 は，つまり，[図 1-1] の定義域は ＿＿＿＿＿＿＿＿ であるから，$x=0$ で連続性は考えられない，ということ。

または [図 1-2] の定義域は ＿＿＿＿＿＿＿＿ であるから，$x=-3$ で連続性は考えられない，ということ。

定義域以外では連続とか連続でないとかの判断はできない，ということである。

2 は，つまり，[図 2] は $x=3$ で連続でない，ということ。右極限と左極限が一致しない。

グラフがずれていたら連続ではない，ということである。

3 は，つまり，[図 3] は $x=1$ で連続でない，ということ。右極限と左極限が一致するから 2 は満たしているのだが，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ と $f(1)$ が一致しない。

グラフに穴が開いていたら連続ではない，ということである。

整関数，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数はいずれもその定義域で連続である。

問題 1　次の関数の定義域をいえ。また，定義域で連続かどうかを調べよ。　(➔教科書 p.61　問 18)

(1) $f(x) = |x|$　　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \end{cases}$　　(3) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$

● 連続関数の性質 (1) ●

ある区間 I で，関数 $f(x)$，$g(x)$ が連続ならば，次の関数も同じ区間 I で連続である。

1. $hf(x)+kg(x)$　　ただし，h，k は定数
2. $f(x)g(x)$
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　ただし，区間 I のすべての x について，$g(x) \neq 0$

問題2 次の関数の定義域をいえ。また，定義域で連続かどうかを調べよ。 (➡教科書 p.62　問 20)

● 連続関数の性質 (2) ●

$f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$，$f(b)$ が異符号ならば，a と b の間に $f(c)=0$ となる c が少なくとも 1 つある。

問題3 方程式 $\cos x = x$ は，区間 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に実数解をもつことを示せ。 (➡教科書 p.63　問 21)

上の「連続関数の性質 (2)」を一般化すると，次の**中間値の定理**が得られる。

● 中間値の定理 重要 ●

$f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の値 k に対して，$f(c)=k$ $(a<c<b)$ となる c が少なくとも 1 つある。