極限の計算

収束する数列の極限値については，次の性質が成り立つ。

● 極限値の性質 ●

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　ただし，k は定数
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$，　$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$，　$\beta \neq 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

例 1

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \dfrac{1}{n} = 2 \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 2 \times 0 = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 1 + 0 = 1$

※ $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0}$ であることはよく利用する。覚えておくとよい。

問題1　次の極限値を求めよ。　(➡教科書 p.33　問 4)

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n-1}$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$　　(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{n^2+n-4}$

問題2　次のような一般項をもつ数列の極限を調べよ。　(➡教科書 p.34　問 5)

(1) $n^3 - 4n$　　(2) $2n - n^5$　　(3) $\dfrac{n^2+2n+3}{n+2}$

問題3　次の極限値を求めよ。　(➡教科書 p.34　問 6)

(1) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$　　(2) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n} - n)$

● 極限と大小関係 ●

1 すべての自然数 n について $a_n \leqq b_n$ のとき，

(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ ともに収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$

(2) $\{a_n\}$ が発散するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

2 重 要 すべての自然数 n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

1 の (1) について，

$$\text{つねに } a_n < b_n \text{ なのに，} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

となることがある。この「等しくないものも，無限に大きくすると等しくなる」という性質などは，数列の極限の面白いところであり，不思議なところであり，厄介なところでもある。

2 は「**はさみうちの原理**」と呼ばれる。今後，数学Ⅲの分野で頻繁に利用される重要な考え方である。

さっそく「はさみうちの原理」を使って，極限を求めてみよう。

問題4 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$ を求めよ。　(➡教科書 p.35　問 7)

問題4 不等式 $-|a| \leqq a \leqq |a|$ が成り立つことを用いて，$\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ であることを示せ。　(➡教科書 p.35　練習 2)