無限級数

無限数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という。記号を用いて $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ とも書く。つまり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

一方，数列 $\{a_n\}$ を，無限に加えるのではなく，初項から第 n 項まで加えた和 S_n を，無限級数①の＿＿＿＿＿＿＿＿という。つまり，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

部分和のつくる数列 $\{S_n\}$ が収束して，極限値が S になるとき，つまり，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (定数)　となるとき，無限級数①は S に**収束する**といい，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$$

とかいて，S を無限級数①の**和**という。

例 1 無限級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots\cdots$ の和について

① 初項から第 n 項までの和は $S_n = \dfrac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

② $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 2 - 2 \cdot 0 = 2$

③ 部分和が収束したので，この無限級数は収束し，その和は 2 である。

例 2 無限級数 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdots$ の和について

① 初項から第 n 項までの和は

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

② $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

③ 部分和が収束したので，この無限級数は収束し，その和は 1 である。

例 3 無限級数 $1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3n-2) + \cdots\cdots$ の和について

① 初項から第 n 項までの和は

$$S_n = 1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 1 + 3(n-1)\} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

② $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n}{2} = \infty$

③ 部分和が収束しなかったので，この無限級数の和は考えることができない。

例 3 のように，部分和のつくる数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数は**発散する**という。

問題1 $\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ であることを使って，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ の和を求めよ。

(➡教科書 p.42　問 1)

問題2 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ は発散することを示せ。

(➡教科書 p.42　問 2)

無限級数の収束，発散について，次のことがいえる。

● 無限級数の収束・発散 ●

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\Updownarrow$ **対　偶**

2. 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する

問題3 次の無限級数は発散することを示せ。

(➡教科書 p.43　問 3)

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\cdots\cdots$

(2) $1-2+3-4+5-\cdots\cdots$