

関数の極限

関数 $f(x)$ において、 x が a 以外の値をとりながら、 a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくことを、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x)$ は α に _____ といい、次のように表す。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または、} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

このとき、 α を、 $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の _____ という。

問題1 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.50 問1)

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x+3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} 3^x$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_2(3x+1)$

x の値が限りなく大きくなることを、 $x \rightarrow \infty$ または $x \rightarrow +\infty$ 、逆に、負であつて絶対値が限りなく大きくなることを $x \rightarrow -\infty$ で表す。

問題2 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.50 問2)

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2}$

関数の極限值についても、数列の場合と同様に、次のことがいえる。

● 極限値の性質 ●

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ のとき,}$$

① $\lim_{x \rightarrow a} \{hf(x) + kg(x)\} = h\alpha + k\beta$

② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

③ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし、 $\beta \neq 0$

④ $f(x) \leq g(x)$ ならば、 $\alpha \leq \beta$

⑤ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$

関数 $f(x)$ において、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x)$ が限りなく大きくなる場合、 $f(x)$ は**正の無限大に発散する**といい、次のように表す。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{または、} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty$$

同様に、**負の無限大に発散する**場合も考えられる。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{または、} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty$$

問題3 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.51 問3)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{x+1}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

問題4 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.52 問4)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^3 - 5x^2 - 10x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2}$

分母が0に収束する場合の極限

分母が0に収束する関数も、収束する場合がある。

例 1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$
 (与式) $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} = 4$

上の例の場合、分母が0になる原因は、分母に含まれる $(x-2)$ という因数である。

分母が0になる原因である $(x-2)$ が消えなければ、全体は収束しない。つまり、全体が収束するためには分子も $(x-2)$ で割り切れなければならない。

● $\frac{f(x)}{g(x)}$ の収束 ●

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \text{ (定数)} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

問題 1 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.52 問 5)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3+1}$

問題 2 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.52 問 6)

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

問題 3

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+k}-1}{x-2}$ が有限な値になるように、定数 k の値を定め、その極限值を求めよ。(吉教科書 p.53 問 7)