分母が0に収束する場合の極限

分母が 0 に収束する関数も，収束する場合がある。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+1}=4$$

上の例の場合，分母が 0 になる原因は，分母に含まれる $(x-2)$ という因数である。

分母が 0 になる原因である $(x-2)$ が消えなければ，全体は収束しない。つまり，全体が収束するためには分子も $(x-2)$ で割り切れなければならない。

● $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の収束 ●

$$\lim_{x\to a}g(x)=0 \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\text{定数}) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=0$$

問題1 次の極限値を求めよ。 (吉教科書 p.52　問 5)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}$

問題2 次の極限値を求めよ。 (吉教科書 p.52　問 6)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

問題3 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+k}-1}{x-2}$ が有限な値になるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ。 (吉教科書 p.53　問 7)

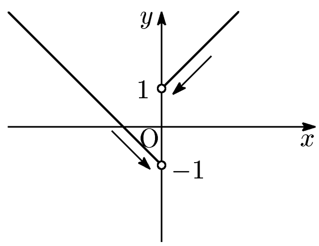
問題4 次の極限値を求めよ。 (吉教科書 p.53　問 8)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

右極限・左極限

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{|x|}$

$f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ とすると，$f(x)=\begin{cases}-x-1 & (x<0)\\ \;\;x+1 & (x>0)\end{cases}$



「$x\to 0$」とは言っても，小さいほうから 0 に近づく場合と，大きいほうから 0 に近づく場合とがある。通常はこれらを区別しなくても計算できるが，この例の場合は

x が「左から」0 に近づくとき，$f(x)\to\boxed{\quad}$

x が「右から」0 に近づくとき，$f(x)\to\boxed{\quad}$

のように，極限値が異なる。

こういった場合，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ は確定しないので「存在しない」と答えることになるが，左右別々に考えれば極限値が存在する。

x が左から 0 に近づくときの極限値が -1 であるから，これを $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to a-0}f(x)=-1}$ と書き，

x が右から 0 に近づくときの極限値が 1 であるから，これを $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to a+0}f(x)=1}$ と書く。

● 極限値の存在 ●

$$\lim_{x\to a}f(x)\text{ が存在する}\iff \lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)$$

問題5 次の極限を求めよ。 (吉教科書 p.54　問 9)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x}{|x|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}$