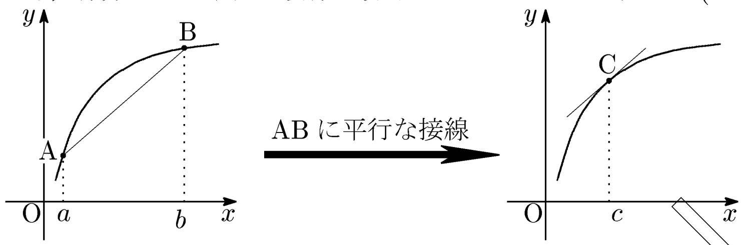
3年数学予習シート　■平均値の定理■

※どんな関数であっても，線分 AB に平行な接線を引くことができるだろうか？ (Yes・No)



平均値の定理

● 平均値の定理 ●

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，次の条件を満たす c が存在する。

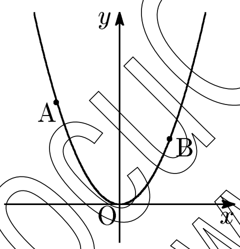
$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)}$$

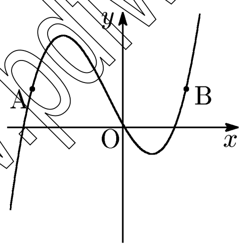
※特に，$f(a)=f(b)$ のとき，この定理は ＿＿＿＿＿＿ **の定理**と呼ばれる。

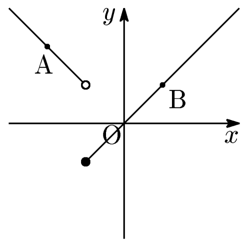
ロルの定理：関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，次の条件を満たす c が存在する。

$$\boldsymbol{f'(c)=0 \qquad (a<c<b)}$$

問題1　次の関数について，線分 AB に平行な接線は引けるか。引ける場合はそれを作図し，引けない場合は「引けない」と答えよ。







問題2　次の関数について，[　] 内に示された a，b の値に対して，平均値の定理を満たす c の値を求めよ。

(➡教科書 p.98　問 8)

(1) $f(x)=x^2 \quad [a=0,\ b=2]$

(2) $f(x)=\sqrt{x} \quad [a=1,\ b=4]$

$b = a + h$，$\dfrac{c-a}{h} = \theta$ という置き換えをすると，平均値の定理は次のように読みかえられる。

平均値の定理 (2)：関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ a+h]$ で連続で，開区間 $(a,\ a+h)$ で微分可能ならば，次の条件を満たす θ が存在する。

$$\boldsymbol{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1)}$$

※少し変形してあるが，教科書 p.100 の式と同じである。

平均値の定理から，次の性質が導かれる。

● 定数関数と微分 ●

1 $f'(x)$ がつねに $0 \Longrightarrow f(x)$ は定数関数

2 つねに $f'(x) = g'(x) \Longrightarrow g(x) = f(x) + C$ (C は定数)

[証明]

平均値の定理による不等式の証明

問題3 $a < b$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。 (➡教科書 p.101　問 11)

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$$