

置換積分法

次の手順に従って積分を計算する方法を、置換積分法という。

●置換積分法の手順●

- ① ある部分の x の式を、 t とおく。(u とおくこともある。何でもよい)
- ② ①でおいた式を $x = \dots$ に変形し、 $\frac{dx}{dt}$ (または $\frac{dt}{dx}$) を計算する。
- ③ ②のことを、元の式に代入し、不定積分を t だけの式にする。
- ④ ③で作った式を計算し、 t の式で答えを出す。
- ⑤ t を元に戻し、 x の式で答える。

例 $\int x(1-x)^5 dx$ を、置換積分法で計算する。

- ① $t = 1 - x$ とおく。
- ② ①より、 $x = 1 - t$ 。これより、 $\frac{dx}{dt} = -1$ (だから、 $dx = -dt$)
- ③ 問題の式に②のことを代入して、 $\int (1-t)t^5(-dt)$
- ④ ③を計算して、 $\int (-t^5 + t^6)dt = -\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{7}t^7 + C = -\frac{1}{42}t^6(6t - 7) + C$
- ⑤ t を元に戻して、 $-\frac{1}{42}(1-x)^6(6x+1) + C$

問題1 次の不定積分を求めよ。

(→教科書 p.135 問6)

(1) $\int x(2x+3)^4 dx$

(2) $\int x\sqrt{1+x} dx$

(3) $\int \frac{x}{(2x+3)^2} dx$

問題2 [] 内に示した置換によって、次の不定積分を求めよ。

(→教科書 p.135 問7)

(1) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ [$e^x = t$]

(2) $\int \frac{\log x}{x} dx$ [$\log x = t$]

問題3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 4} dx$

(2) $\int (e^x + 1)^2 e^x dx$

(3) $\int \sin^3 x dx$

 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ の形の積分 $\frac{\cos x}{\sin x}$ や $\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$ のような形の積分では、分母を u とおくとよい。 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \cdots \textcircled{1}$ について、 $u = f(x)$ とおくと、 $\frac{du}{dx} = f'(x)$ (だから、 $du = f'(x)dx$)。よって①は、 $\int \frac{1}{u} du = \log |u| + C$ 。 $\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \cdots (*)$

※ 今後、(*) は公式として用いて構わない。

問題4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

(2) $\int \frac{dx}{\tan x}$