部分積分法

微分法の積の公式より，$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ であるから，

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

この式の両辺を積分して，次のことが得られる。

● 部分積分法 ●

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

部分積分法のコツ … 微分すると定数になる方を $f(x)$ として選ぶ。

例 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

x を $f(x)$，$\cos x$ を $g'(x)$ と見る。このとき $g(x) = \sin x$ である。

$$(\text{与式}) = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x + \int (x)'\sin x\,dx$$

問題1 次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.137　問 10)

(1) $\displaystyle\int (2x-1)(x+1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　(4) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

いろいろな積分 (三角関数の積和変換，半角公式)

思い出してください。(➡数Ⅱ教科書 p.72，77)

半角の公式　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$，　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

積を和に直す公式　$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$，　$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$，　$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

問題2 次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.138　問 11)

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x\,dx$

いろいろな積分 (部分分数に分ける)

分母が因数分解できる分数の場合，それを $\dfrac{a}{x+b}$ の形に分解することができる。

例 $\dfrac{x-8}{x^2-x-2}$

分母を因数分解して，$\dfrac{x-8}{(x+1)(x-2)}$。これを $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}$ の形に分解する。

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(a+b)x+(-2a+b)}{(x+1)(x-2)}$$

これが $\dfrac{x-8}{(x+1)(x-2)}$ と一致すればよいから，$a+b=1$，$-2a+b=-8$　　$\therefore a=3$，$b=-2$

よって，$\dfrac{x-8}{x^2-x-2}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}$

問題3 部分分数に分けることにより，次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.139　問 13)

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}\,dx$