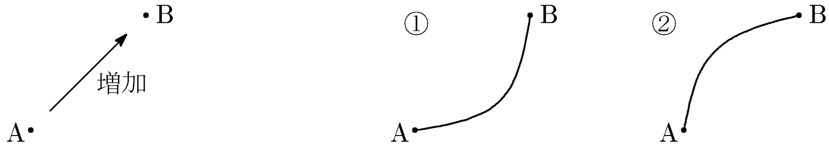
3年数学予習シート　■グラフの凹凸■

グラフをかくとき，$f'(x)$ を調べたところ，A〜B では増加することが分かったとする。しかし，増加といっても図の①，②のような 2 通りの曲線のパターンが考えられる。正確なグラフをかくためには，どちらのパターンになっているかを知る必要があるのだが，これは，$f'(x)$ を調べるだけでは分からない。



そこで …

2 次導関数の意味

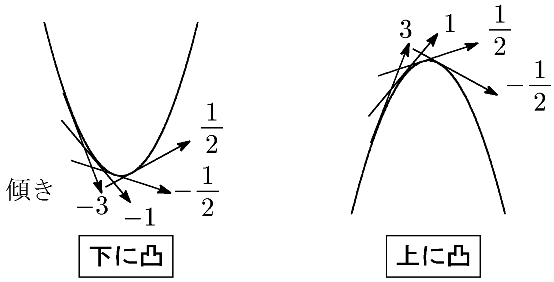
上の図の①のような場合，グラフは ________ **に凸**であるといい，②のような場合，グラフは ________ **に凸**であるという。

右の図のように，下に凸なグラフの場合はグラフが右に進むにつれて接線の傾きが増加し，上に凸なグラフの場合は接線の傾きが減少する。

つまり，接線の傾きの変化を表す $f'(x)$ について，

$f'(x)$ が増加する $\Longrightarrow$ グラフは下に凸

$f'(x)$ が減少する $\Longrightarrow$ グラフは上に凸



といえる。$f'(x)$ が増加するのは，$f''(x)\boxed{}0$ のときであり，減少するのは $f'(x)\boxed{}0$ のときであるから，グラフの凹凸について，次のようにまとめられる。

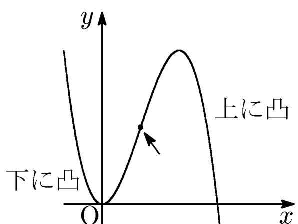
● グラフの凹凸 ●

1　$a < x < b$ の範囲で $f''(x) > 0$ ならば，
　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で，グラフは下に凸である。

2　$a < x < b$ の範囲で $f''(x) < 0$ ならば，
　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で，グラフは上に凸である。

グラフの中には，下に凸な曲線と，上に凸な曲線が組み合わさっているものがあり，右の図のように凹凸が切り替わる境目の点が存在することがある。この点を ________________ という。変曲点は $f''(x)$ の符号が入れ替わる点であるから，次のことがいえる。

点 $(x_0,\ y_0)$ が $y = f(x)$ の変曲点 $\Longrightarrow$ $f''(x_0) = 0$



問題1　次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点があれば求めよ。　(➔教科書 p.112　問 1)

(1) $y = x^4 - x^3$　　(2) $y = \log x$　　(3) $y = (2x-3)e^x$

グラフをかく

1 次導関数を調べるとグラフの増加・減少が分かり，2 次導関数を調べるとグラフの凹凸が分かる。より正確なグラフをかきたいときは，2 次導関数まで調べるとよい。

グラフをかくときの手順をまとめておこう。

● グラフのかき方 ●

1. $f'(x)$ と $f"(x)$ を計算する。
2. $f'(x)=0$ になる x と，$f"(x)=0$ になる x を求めて，増減表に書き込む。
3. 増減，凹凸を調べて，増減表に書き込む。
4. $x \to \pm\infty$ のとき，グラフがどうなるか確認する。

➡特に分数関数のときは，漸近線のチェックも行う。

問題 2　次の関数について，極値，凹凸などを調べて，そのグラフをかけ。　(➡教科書 p.113　問 2)

(1) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(3) $y=x\sqrt{1-x^2}$　　(4) $\log(1+x^2)$

2 次導関数と極値の間には，次のような関係がある。

● 2 次導関数と極値 ●

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(x_0)\text{ は極小値}$$
$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(x_0)\text{ は極大値}$$

※ $f'(x_0)=0$，$f"(x_0)=0$ のときは，極値をとるのかどうか，増減表を書かないと分からない。

問題 3　2 次導関数を使って，次の関数の極値を求めよ。。　(➡教科書 p.114　問 3)

(1) $f(x)=x^4-2x^2+6$　　(2) $f(x)=2\sin x+\cos 2x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$