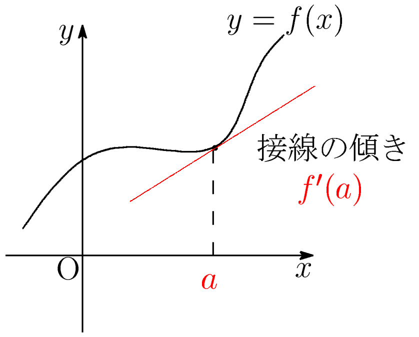
1　接線と法線の方程式

接線の方程式

数学Ⅱでも学習しましたが，微分係数の図形的な意味を確認しておきましょう。

微分係数 $f'(a)$
　…… 曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ となる点での接線の傾き



$y=f(x)$ 上で $x=a$ となる点，つまり点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きが $f'(a)$ であるわけですから，接線の方程式は次のようになります。

◇ 接線の方程式 ◇

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

例　題

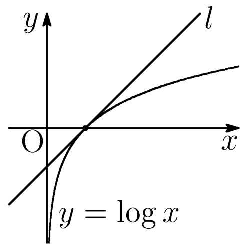
$y=\log x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線 l の方程式を求めよ。

$f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

これより点 $(1,\ 0)$ における l の傾きは，$f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

よって l の方程式は　$y-0=1\cdot(x-1)$

つまり，$y=x-1$



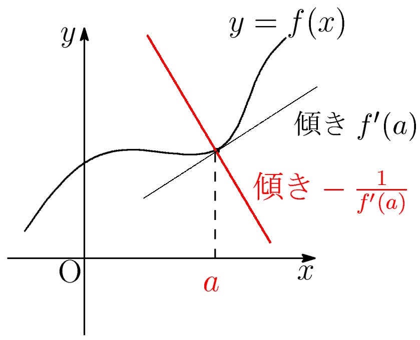
法線の方程式

曲線 C 上の点 P を通り，そこでの接線と垂直な直線を，点 P における曲線 C の**法線**といいます。法線と接線は互いに垂直ですから，接線の傾きが $f'(a)$ ならば，法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ と表されます。

例えば上の例題において，$f(x)=\log x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における法線の方程式は

$$y-0=-\frac{1}{1}(x-1)$$

つまり，$y=-x+1$ となります。



◇ 法線の方程式 ◇

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)}$$

例　題

円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線と，法線の方程式を求めよ。

円の方程式の両辺を x で微分すると，$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって $y\neq 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

これより点 $(3,\ 4)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{3}{4}$

法線の傾きは $\dfrac{4}{3}$

したがって，接線の方程式は $y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$　つまり $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$

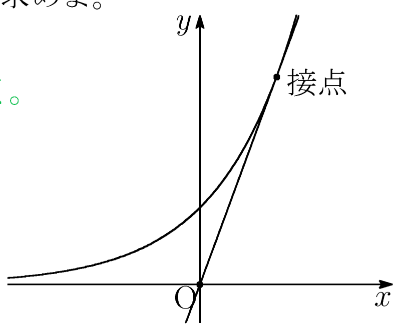
法線の方程式は $y-4=\dfrac{4}{3}(x-3)$　つまり $y=\dfrac{4}{3}x$

接線の方程式は公式より簡単に $3x+4y=25$ と求められますが，ここでは微分法を応用して求めました。

これまで紹介した問題は，すべて接点の座標が分かっているものでした。
次の問題は，接点が分かっておらず「ある点から曲線に向かって接線をひく」という問題です。

例　題

原点から曲線 $y=e^x$ にひいた接線 l の方程式を求めよ。



接点は分かっていない。そこで $(t,\ e^t)$ とおく。

$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$ だから

接線の方程式は $y-e^t=e^t(x-t)$ … ①

と表される。

①は原点を通るので，$x=0$，$y=0$ を代入すると，

$$-e^t=-e^t t$$

$e^t\neq 0$ なので，両辺を e^t で割ると　$-1=-t$　$\therefore t=1$

よって求める接線の方程式は，①に $t=1$ を代入し，$y=ex$