5　三角関数の導関数

これまで微分してきた関数は，整式，分数式，累乗根を組み合わせた「単純な」関数ばかりでした。これに対して，三角関数，対数関数などは「特殊な」関数であるといえ，こうした関数にも導関数を考えることができます。
この節では特殊な関数の導関数の例として，三角関数の導関数を考えることにしましょう。

$\sin x$ の導関数

関数 $y = \sin x$ について，導関数の定義より，

$$\boldsymbol{(\sin x)'} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

右辺の分子に「差を積に直す公式」を適用して，

$$(\text{与式}) = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\dfrac{2x+h}{2}\sin\dfrac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}}{\cancel{h}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\boxed{\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}}\cdot\frac{\cancel{h}}{\cancel{2}}$$

極限の章で学習した公式　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ より，上の式の枠線部分は1となるから，

$$(\text{与式}) = \cos(x+0)\cdot 1 = \cos x$$

このことから，$(\sin x)' = \cos x$ であることが分かりました。「サインを微分するとコサインになる」というわけですね。何だか不思議な気がしませんか？

$\cos x$ の導関数

三角関数の章で学習したように，$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ですから，

$$\boldsymbol{(\cos x)'} = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}'$$

右辺は $\sin(\quad)$ と $\dfrac{\pi}{2}-x$ の合成関数だから，$(\text{与式}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)$

同じく三角関数の章で学習した公式より，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ なので，

$$(\text{与式}) = -\sin x$$

$\tan x$ の導関数

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので，商の微分法より

$$\boldsymbol{(\tan x)'} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

以上のことをまとめると，次のようになります。

◇三角関数の導関数◇

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin x \cos x$

積の微分法より，

$$y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

(2) $y = \tan 5x$

$\tan(\quad)$ と $5x$ の合成関数であるから，

$$y' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}$$

(3) $y = \sin^3 x$

$(\quad)^3$ と $\sin x$ の合成関数であるから，

$$y' = 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$