8　指数関数の導関数，高次導関数

指数関数の導関数

指数関数 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ を微分することを考えましょう。定義に従って微分するのではなく，これまでに学習したことを利用して微分してみます。

「$y = a^x$」を言い換えると，「$x = \log_a y$」となります。右辺は $\log_a(\quad)$ と y との合成関数なので，両辺を x で微分すると，

$$1 = \frac{1}{y \log a} \cdot y' \quad \text{つまり} \quad y' = y \log a = a^x \log a$$

よって，$(a^x)' = a^x \log a$ となることが分かりました。
特に $a = e$ のときは，$(e^x)' = e^x \log e = e^x$ となります。以上をまとめておきましょう。

◇ 指数関数の導関数 ◇

$$(a^x)' = a^x \log a, \qquad (e^x)' = e^x$$

※関数 $y = e^x$ は，微分しても変化しないただ１つの関数です。

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y = 2^x$

$y' = 2^x \log 2$

(2) $y = 3^{2x+1}$

$3^{(\quad)}$ と $2x+1$ との合成関数なので，$y' = 3^(2x+1) \cdot (2x+1)' = 2 \cdot 3^{2x+1}$

(3) $y = e^{-x^2}$

$e^{(\quad)}$ と $-x^2$ との合成関数なので，$y' = e^(- x^2) \cdot (-x^2)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

x^x の導関数

$y = x^x$(ただし $x > 0$) という関数は，整関数でも指数関数でもありません。したがって，$y = x^\alpha$ や $y = a^x$ の導関数の公式は使えません。

この関数を対数微分法を用いて微分してみましょう。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^x \quad \text{つまり} \quad \log y = x \log x$$

左辺は合成関数，右辺は積になっていることに注意して，両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

よって，$y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

つまり，$\boldsymbol{(x^x) = x^x(\log x + 1)}$ となることが分かりました。整関数，指数関数の導関数とはまったく似ても似つかない結果になりましたね。

高次導関数

関数 $y = f(x)$ を微分したものを $f'(x)$ と書くわけですが，さらにこれをもう 1 回微分したものを**第 2 次導関数**といって，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$などで表します。これに対して，これまでのように 1 回だけ微分した $f'(x)$ のことを**第 1 次導関数**ということがあります。

例 1　$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ について，$y' = 3x^2 + 4x - 4$ であり，$y'' = 6x + 4$

この決め方で，3 回微分したものは y'''，4 回微分したものは $\cdots$ といくらでも考えることができるわけですが，一般に，関数 $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を，$f(x)$ の**第 n 次導関数**といい，$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$，$\boldsymbol{y^{(n)}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^ny}{dx^n}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)}$などで表します。

第 2 次以上の導関数を，**高次導関数**といいます。

例 2　$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ について，

第 1 次導関数　$y' = 3x^2 + 4x - 4$　　第 2 次導関数　$y'' = 6x + 4$

第 3 次導関数　$y''' = 6$

第 4 次導関数　$y^{(4)} = 0$　(注：y'''' と書いても構いませんが，普通は $'$ は 3 つまで)

これ以降は，ずっと導関数は 0

例 3　$y = \sin x$ について，

第 1 次導関数　$y' = \cos x$　　第 2 次導関数　$y'' = -\sin x$

第 3 次導関数　$y''' = -\cos x$　　第 4 次導関数　$y^{(4)} = \sin x$

これ以降は，この 4 つの繰り返し。4 回微分すると元に戻る。

例 4　$y = e^x$ について，

第 1 次導関数　$y' = e^x$　　第 2 次導関数　$y'' = e^x$

第 3 次導関数　$y''' = e^x$

何度微分しても変わらない。つまり，$y^{(n)} = e^x$ ということ。

微分方程式

関数 $y = e^x$ は微分しても変化しませんから，$y = y'$ という関係が成り立ちます。また，関数 $y = x^2$ については導関数が $y' = 2x$ となりますから，$y'^2 = 4y$ という関係が成り立つといえます。

このように y，y'，y'' などが含まれた関係式を**微分方程式**といい，その微分方程式を満たすような関数 y を，微分方程式の解といいます。上の例でいえば

関数 $y = e^x$ は微分方程式 $y = y'$ を満たす

関数 $y = x^2$ は微分方程式 $y'^2 = 4y$ を満たす

といえます。

例　題

関数 $y = e^{2x} + e^{-2x}$ は $y'' = 4y$ を満たすことを示せ。

$y' = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ なので，$y'' = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$

よって (左辺) $= 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x})4y =$ (右辺)

したがって，$y'' = 4y$ は成り立つ。