9　いろいろな形で与えられた関数の微分法

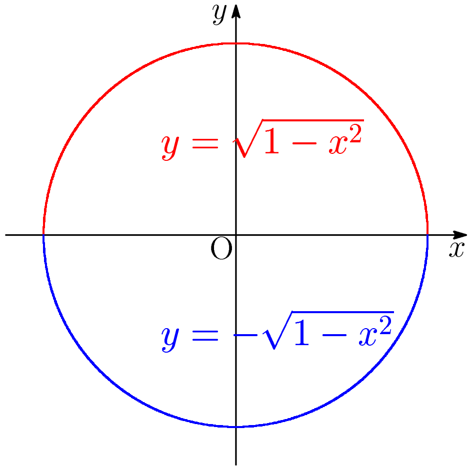
円の方程式の微分

原点を中心とする半径 1 の円は，$x^2+y^2=1$ という方程式で表されます。

実はこの方程式を満たす x，y について，y は x の関数ではありません。(例えば $x=\dfrac{1}{2}$ のとき，y の値は 2 つあります)

$x^2+y^2=1$ より，$y^2=1-x^2$。よって，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ となります。

つまり円は，$y=\sqrt{1-x^2}$ (上半分)，$y=-\sqrt{1-x^2}$ (下半分) という 2 つの関数が合体してできた図形だったわけです。



ということは円を微分するときは，この 2 つの無理関数を微分すればよいわけですが，直接はじめの方程式を微分することも可能です。

$x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}1$$

この式の緑色の波線部について，文字 y の式を x で微分するのは不自然ですから，

$$2x+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}y^2=0$$

と変形します。これでオレンジ色の波線部は自然な計算ができて，

$$2x+\frac{dy}{dx}\cdot 2y=0$$

となります。よって，$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}}$ と計算ができました。

例　題

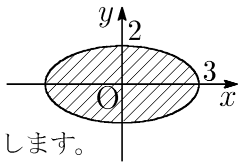
次の方程式について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

$$\frac{d}{dx}(x+2)^2+\frac{d}{dx}(y-1)^2=\frac{d}{dx}9$$

$$2(x+2)+2(y-1)\frac{dy}{dx}=0\quad \text{よって，}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x+2}{y-1}$$

(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$



※この方程式は右図のような楕円を表します。詳しくは数学 C で学習します。

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{d}{dx}\cdot\frac{y^2}{4}=\frac{d}{dx}1$$

$$\frac{2x}{9}+\frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{dx}=0\quad \text{よって，}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$$

媒介変数で表された関数の微分

曲線の表現方法には，**通常表示**と**媒介変数表示**の 2 種類があります。

【通常表示】$y = x^2$ $\rightarrow$ 【媒介変数表示】$x = t$，$y = t^2$
【通常表示】$y = \log x$ $\rightarrow$ 【媒介変数表示】$x = e^t$，$y = t$
【通常表示】$x^2 + y^2 = 1$ $\rightarrow$ 【媒介変数表示】$x = \cos t$，$y = \sin t$

曲線 C 上の点 (x, y) が，t などの関数として

$$\boldsymbol{x = f(t),\quad y = g(t)} \qquad \cdots ①$$

のように表現できるとき，①を曲線 C の媒介変数表示といい，t を**媒介変数**といいます。

媒介変数表示の利点は，通常表記に比べて，表現できる曲線の種類が多いことです。渦巻き曲線やハート型の曲線など，媒介変数表示でなければ表すことのできない曲線がたくさんあります。

媒介変数表示の欠点は，表し方が 1 通りに決まらないことです。例えば上には $y = x^2$ の媒介変数表示として「$x = t$，$y = t^2$」を挙げましたが，他にも「$x = t - 1$，$y = (t - 1)^2$」など無数にあります。

では，媒介変数で表された曲線を微分することを考えましょう。次の公式で計算できます。

◇ 媒介変数で表された関数の微分法 ◇

$$x = f(t),\ y = g(t) \text{ のとき，} \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(x)}{f'(x)}}$$

※この公式の証明には，合成関数と逆関数の微分が利用されていますが，ここでは省略しました。

例　題

次の媒介変数表示で与えられた曲線について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x = t$，$y = t^2 + 1$ (通常表示なら「$y = x^2 + 1$」です)

$$\frac{dx}{dt} = 1,\quad \frac{dy}{dt} = 2t \text{ なので，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t\ (= 2x)$$

(2) $x = t^3 + t$，$y = t^2 - 3t + 1$ (通常表示は困難です)

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1,\quad \frac{dy}{dt} = 2t - 3 \text{ なので，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 3}{3t^2 + 1}$$

(3) $x = \cos t$，$y = \sin t$ (通常表示なら「$x^2 + y^2 = 1$」です)

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = \cos t \text{ なので，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

※答えの中に変数 t が残ってしまうのは，仕方のないことです。