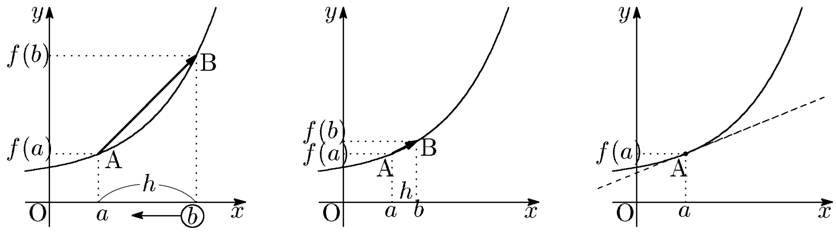
1　微分可能と連続

数学Ⅱで学習したことを簡単に復習しましょう。下の図を見てください。



図のような関数 $f(x)$ のグラフにおいて，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ という分数は，直線 AB の傾きを表しています。(一番左端の図)

この状態で点 B が点 A に向かって近づいていくと，直線 AB もそれに伴って動きます。点 B が極限まで点 A に近づいたとき，直線 AB は点 A における接線になるんでした。このとき分数 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は，点 A における接線の傾きに限りなく近づきます。

さて，$b \to a$ のとき，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の極限値が存在するなら，その値を

$f(x)$ の，$x=a$ における**微分係数**

といい，$f'(a)$ とかきます。つまり，

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ということになります。
この式を $b-a=h$ とおいて書きかえたものも有名ですね。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，必ず存在するとは限りませんが，もし存在するなら，この関数 $f(x)$ は，$x=a$ において**微分可能**であるといいます。

また，ある区間の全ての値で微分可能なとき，$f(x)$ はその区間で微分可能であるといいます。

◇微分可能と連続◇

$f(x)$ が $x=a$ において微分可能　$\Longrightarrow$　$f(x)$ が $x=a$ において連続

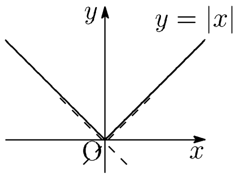
「$f(x)$ が $x=a$ において連続」とは「$x\to a$ のとき，$f(x)\to f(a)$」となることでした。

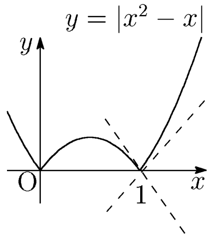
微分可能だとすると，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\cdot f'(a)$$
$$=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立ちます。だから微分可能ならば連続だといえるわけです。

連続だが，微分可能ではない関数の例





絶対値を含む関数などは，連続ですが微分可能ではない場合があります。

$y=|x|$ では $x=0$，$y=|x^2-x|$ では $x=0$，1 において，微分可能ではありません。というのも，これらの地点で接線を引こうと思っても，接線が 1 つに確定しないからです。

もう少しきちんと言うと，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の極限値が存在しません。左からの極限と，右からの極限が一致しないからです。接線の作り方は先ほども述べましたが，例えば $y=|x^2-x|$ のグラフでは，$x=1$ の地点に右から点を近づけて作った接線と，左から点を近づけて作った接線が異なります。

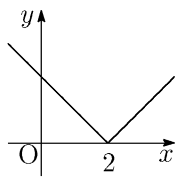
ある地点で微分可能かどうかは，次のようにして調べます。

例　題

次の関数が，与えられた x で微分可能かどうか調べよ。

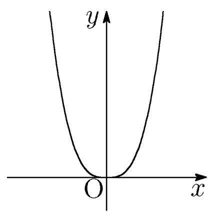
(1) $f(x)=|x-2|$　$(x=2)$　　(2) $f(x)=|x^3|$　$(x=0)$

(1)
$$\lim_{h\to+0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|2+h-2|-|2-2|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|2+h-2|-|2-2|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$



となり，右からの極限と左からの極限が一致しないから，$f'(2)$ は存在しない。
よって，$x=2$ で微分可能ではない。

(2)
$$\lim_{h\to+0}\frac{|h^3|-|0^3|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to+0}h^2=0$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{|h^3|-|0^3|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to+0}(-h^2)=0$$



よって，左右の極限が一致するので，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ が存在し，その値が 0。
つまり，$x=0$ で微分可能である。

一言でいえば「連続」とは「つながっていること」でした。それに対して

「微分可能」とは「滑らかであること」

といえます。絶対値のグラフのようにとがったグラフには接線を引くことができません。穴が開いたり千切れていたりする不連続なグラフも同じことです。