2　導関数

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を**導関数**といいました。x の値に対して，その微分係数を対応させる関数のことです。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを**微分する**といいます。

平たくいえば導関数は「接線の傾きの変化を表す式」ということになります。微分可能な関数には接線を引くことができるわけで，その傾きを求めるために必要な関数が導関数です。

$y=f(x)$ の導関数はいろいろな書き方があります。

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

導関数について，次の性質が成り立ちます。

1 $\{kf(x)\}'=kf'(x)$

2 $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

$y=x^n$ (n は自然数) の導関数は重要でした。

二項定理より，$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1})={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

よって，$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$　**(n は自然数)**

積の導関数

$(x-3)(2x^2+5x)$ などのように，$f(x)g(x)$ という形をした関数の微分を考えましょう。上で述べた和と差の導関数みたいに「$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g'(x)$」とできれば何の苦労もないのですが，残念なことにそううまくはいきません。

$F(x)=f(x)g(x)$ とおくと，

$$\{f(x)g(x)\}'=F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$ …同じ項を挿入

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

◇積の導関数◇

$$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

商の導関数

次に，$\dfrac{2x-3}{x^2+4}$ などのような，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ という形をした関数の微分を考えましょう。
「$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$」とできれば何の苦労もないのですが，これまた，そうはいきません。

準備のため，$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を計算します。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

この結果より，積の導関数の公式も利用して

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

…積の導関数の公式

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

◇ 商の導関数 ◇

$$\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

特に，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x^2+3x)(2x-3)$

$y' = (x^2+3x)'(2x-3) + (x^2+3x)(2x-3)$ …交互に微分して足す

$(2x+3)(2x-3) + (x^2+3x)\cdot 2 = 6x^2+6x-9$

(2) $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$

$y' = \dfrac{(x+2)'(2x+1)-(x+2)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$ …交互に微分して引く。分母は 2 乗

$= \dfrac{1\cdot(2x+1)-(x+2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = -\dfrac{3}{(2x+1)^2}$