

5. いろいろな積分

三角関数の2乗や積

$\int \sin^2 x dx$ や、 $\int \sin 2x \cos x dx$ のような積分は、三角関数の章で学習した、半角の公式や積を和に直す公式を利用して解きます。

[半角の公式] $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

[積を和に直す公式]

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} & \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} & \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

例題

(1) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$ 半角の公式

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

(2) $\int \sin 2x \cos x dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left\{ \frac{1}{2} \{ \sin(2x + x) + \sin(2x - x) \} \right\} dx \quad \dots\dots \text{積を和に直す公式} \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C \end{aligned}$$

部分分数に分解

分母の次数が大きい分数式は、分母の次数が低くなるように分解することができます。

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}, \quad \frac{x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{x - 2}$$

分解の手順はこうです。上の右の問題を例に、説明しましょう。

- ① 分母を因数分解する。 $\frac{x - 8}{(x + 1)(x - 2)}$
- ② とりあえず、分母の通りに分解してみる。分子がどうなるかは分からないので、文字でおいておく。

$$\dots\dots \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 2}$$

- ③ ②の式を通分して、もとの式と係数を比較する。

$$\dots\dots \frac{a(x - 2) + b(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{(a + b)x + (-2a + b)}{(x + 1)(x - 2)}$$

分子が $x + 8$ となるから、 $a + b = 1, -2a + b = 8$

- ④ a, b の値を求め、①の式に戻して完成。

$$a = 2, b = -3 \text{ より, } \frac{2}{x + 1} + \frac{-3}{x - 2} = \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{x - 2}$$

この方法により，分数式の積分ができる場合があります。

例題

$$\begin{aligned}\int \frac{x-8}{x^2-x-2} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx && \dots\dots \text{部分分数に分解} \\ &= 2 \int \frac{1}{x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= 2 \int \frac{(x+1)'}{x+1} dx - 3 \int \frac{(x-2)'}{x-2} dx \\ &= 2 \log |x+1| - 3 \log |x-2| + C && \rightarrow \text{置換積分の章を参照}\end{aligned}$$