関数 $y=f(x)$ は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$$

のように表すことができます。これを先の公式に当てはめると，

$$\frac{dx}{dt}=1, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

となりますから，次のことが成り立ちます。

◇曲線の長さ②◇

$a<b$ のとき， $\displaystyle \boldsymbol{s=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx}$

例題

曲線 $y=\log(1-x^2)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の部分の長さを求めよ。

$f(x)=\log(1-x^2)$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$

ここで，$1+\{f'(x)\}^2=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$

よって求める長さは

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-1\right)dx \qquad \cdots \text{部分分数に分解} \\ &= \Big[-\log|1-x|+\log|1+x|-x\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \log 3-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

曲線の長さは，理論上は上のような公式で計算できるのですが，実際のところ公式の中にある $\sqrt{}$ のせいで，積分の計算ができる曲線は非常に限られています。

例えば普通の2次関数や1次関数ですら，まともに計算することができない場合もあります。そのため，曲線の長さを求める問題は，あまりパターンが多くない，といえます。