1　定積分とその計算

数学Ⅱで学習したように，定積分は「x の値が変化したときの，不定積分の変化量」として定義されます。

例えば $f(x) = \cos x$ の不定積分は $\sin x + C$ ですが，x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変化すると，この不定積分は $\sin 0 + C$ から $\sin \frac{\pi}{2} + C$ まで，つまり C から $1 + C$ まで変化します。

x	$1 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{2}$
$f(x)$ の不定積分	$C \quad \rightarrow \quad 1 + C$

このときの変化量は $(1 + C) - C$ で「1」ですね。この値を

$\cos x$ の，区間 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における定積分

といって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

のように書くわけです。

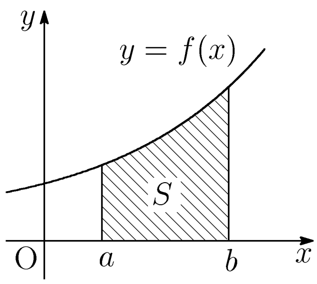
不定積分の変化量，ということを意識しておけば，次の公式は自然に理解できるのではないでしょうか？

◇ 定積分 ◇

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x) \, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

また定積分には，「関数のグラフと x 軸によって囲まれた部分の面積」という図形的な意味もありました。$\int_a^b f(x) \, dx$ は，右図の斜線部分の面積 S を表しています。(ただし，$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき)



いろいろな定積分を計算してみましょう。

例　題

(1) $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

(2) $\displaystyle \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle \int_{-1}^1 e^x \, dx = \Big[\, e^x \,\Big]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$

数学Ⅱのときと同じで，$\Big[\quad\Big]_a^b$ の中には，不定積分から「$+C$」を省いたものを書きます。つまり定積分は，これまでに学習した不定積分の計算ができれば，計算できるわけです。

例えば不定積分の章で $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$ であることを計算しましたが，これより，

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \Big[x \sin x + \cos x\Big]_0^{\pi}$$

というように計算ができます。

例　題

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ だから，

$$(\text{与式}) = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^2$$
$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2)$$
$$= 2\log 2 - \log 3 = \log\frac{4}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\, dx$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$|\cos x| = \cos x$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$|\cos x| = -\cos x$

であるから，

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx$$
$$= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$$