# 3　行列の積

まず次の図を見てください。

1行目と2列目

$$\begin{pmatrix} \boxed{a \quad b \quad c} \\ d \quad e \quad f \\ g \quad h \quad i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \boxed{y} & x \\ w & v & u \\ t & s & r \end{pmatrix}$$

2行目と3列目

(1，2) 成分　(2，3) 成分

$$= \begin{pmatrix} az+bw+ct & \boxed{ay+bv+cs} & ax+bu+cr \\ dz+ew+ft & dy+ev+fs & dx+eu+fr \\ gz+hw+it & gy+hv+is & gx+hu+ir \end{pmatrix}$$

これは，2つの $3\times 3$ 行列の積の仕組みを説明したものです。左辺の前の行列を $A$，後の行列を $B$ とおきましょう。右辺は $AB$ という行列です。

行列の積は，前の行列 $A$ のある1行と，後の行列 $B$ のある1列を組み合わせて計算していきます。行の成分と列の成分を順番に1つ1つ掛け，最後にそれらを全部足します。これが行列 $AB$ の1つの成分になるのです。

上の例では $A$ の行と $B$ の列の組合せが9通りあり，その結果次のように成分が作られます。

$A$ の1行目と $B$ の1列目　→　(1，1) 成分
$A$ の1行目と $B$ の2列目　→　(1，2) 成分
$A$ の1行目と $B$ の3列目　→　(1，3) 成分
$A$ の2行目と $B$ の1列目　→　(2，1) 成分
$A$ の2行目と $B$ の2列目　→　(2，2) 成分
$A$ の2行目と $B$ の3列目　→　(2，3) 成分
$A$ の3行目と $B$ の1列目　→　(3，1) 成分
$A$ の3行目と $B$ の2列目　→　(3，2) 成分
$A$ の3行目と $B$ の3列目　→　(3，3) 成分

当然のことですが，$A$ の行と $B$ の列を組み合わせて新しい行列 $AB$ の成分を作っていきますので，$A$ の行の成分の個数 (つまり，列の本数) と，$B$ の列の成分の個数 (つまり，行の本数) は同じでなければなりません。

### ◇ 行列の積 ◇

$A$ が $l\times m$ 行列，$B$ が $m\times n$ 行列のとき，

**$AB$ の $(i,\ j)$ 成分は，$A$ の $i$ 行目と $B$ の $j$ 列目から作られる。**

$$\underset{\text{行}}{\xrightarrow{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_m}} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \Big\downarrow \text{列} \quad = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_mb_m$$

$2\times 2$ 行列の積はよく用いますので，まとめておきます。

**◇ $2\times 2$ 行列の積 ◇**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

例　題

次の行列の積を計算せよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 = (38) = 38$

※ $1\times 1$ 行列は (　) を省略して書くことができます。

(2)　$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-1) + 2\cdot 5 & 4\cdot 0 + 2\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1) + 1\cdot 5 & 3\cdot 0 + 1\cdot(-3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(4)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 2 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 0 & 5\cdot(-2) + 1\cdot(-1) & 5\cdot 4 + 1\cdot 2 & 5\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -11 & 22 & 3 \end{pmatrix}$$