数学特集

絶対方程式・絶対不等式

絶対値を含んだ方程式・不等式には，大きく分けて 3 種類の解き方がある。それぞれによいところと悪いところがあるので，問題によってうまく使い分けられるようにマスターしておこう。

距離法 … 絶対値とはそもそも，距離を意味するものであった。

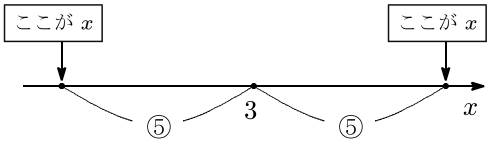
● 距離としての絶対値 ●

数直線上に，点 $\mathrm{X}(x)$，$\mathrm{A}(a)$ があったとすると，

$|x|$ ・・・・・・原点 O と点 X との距離　　$|x-a|$ ・・・・・・点 A と点 X との距離

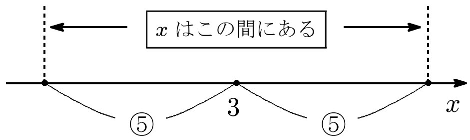
例 1　$|x-3|=5$

(解) 数直線上で，座標が 3 になる点から，x になる点までの距離が 5 であるから，
図より，$x=-2,\ 8$ (答)



例 2　$|x-3|<5$

(解) 数直線上で，座標が 3 になる点から，x になる点までの距離が 5 より短い範囲なので，
図より，$-2<x<8$ (答)



【距離法の欠点】
　複雑な絶対方程式・不等式になったとき，図を利用して解くことが難しくなる。

例えば，$|x+1|=3x-1$，$|x|+|x+1|\leqq 5$ といった，複雑な形式の方程式・不等式の場合は，距離だけで考えていくのは苦しい。

直接法 … 次の性質を覚えておくと，すばやく計算ができる。

● 絶対値と方程式・不等式 ●

[方程式]　$|x|=a \iff x=\pm a$

[不等式]　$|x|<a \iff -a<x<a$　　$|x|>a \iff x<-a,\quad a<x$

例 3　$|x-3|=5$

(解) $x-3=\pm 5$ なので，$x=3\pm 5$　　$\therefore\ x=-2,\ 8$ (答)

例 4　$|x-3|<5$

(解) $-5<x-3<5$ なので，$\begin{cases} -5<x-3 \\ x-3<5 \end{cases}$

これより，$-2<x$ かつ $x<8$ だから，$-2<x<8$ (答)

※ 不等号が $\leqq$ や $\geqq$ となっていても，やり方はまったく同じである。

場合分け法

絶対値記号を使う場合，中身が正なのか負なのかが問題となる。下のような性質があった。

● 絶対値の 2 つの場合 ●

$\boldsymbol{a \geqq 0}$ **のとき** $\boldsymbol{|a| = a}$　　　$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき** $\boldsymbol{|a| = -a}$

例えば $|x-3|$ という式の場合，中身が正なのか負なのかハッキリしないから，絶対値記号を外すことができない。しかし，あらかじめ x が 3 よりも大きな数であることが分かっていたとしたらどうだろう？　この場合は,「$x-3$」という式は必ず正の数になるから，絶対値記号を外すことができるはずである。つまり，

もしも $\boldsymbol{x \geqq 3}$ ならば，中身は $\boldsymbol{x-3 \geqq 0}$ だから，$\boldsymbol{|x-3|}$ は $\boldsymbol{x-3}$ と等しい

といえることになる。

もしも「A」だったら「こんな結果」になる，もしも「B」だったら「あんな結果」になる，という風に，状況を自分で分類して問題を解くことを，**場合分け**という。

では，この場合分けを利用した解答を紹介しよう。

例 5　$|x-3| = 5$

(解) (ⅰ) もしも $x-3 \geqq 0$ だったら (つまり，$\boldsymbol{x \geqq 3}$ だったら)，
左辺の絶対値記号が外れて，$x-3=5$ となるから，$x=8$
今，$x \geqq 3$ という前提で考えていたから，この答えは適しているといえる。

(ⅱ) もしも $x-3<0$ だったら (つまり，$\boldsymbol{x < 3}$ だったら)，
左辺の絶対値記号が外れて，$-(x-3)=5$ となるから，$-x+3=5$ より，$x=-2$
今，$x<3$ という前提で考えていたから，この答えは適しているといえる。
以上 2 つの場合から，$\underline{x=-2,\ 8}$ (答)

例 6　$|x-3| < 5$

(解) (ⅰ) もしも $x-3 \geqq 0$ だったら (つまり，$\boldsymbol{x \geqq 3}$ だったら)，
左辺の絶対値記号が外れて，$x-3<5$ となるから，$x<8$
今，$x \geqq 3$ という前提で考えていたから，それを合わせると $3 \leqq x < 8$

(ⅱ) もしも $x-3<0$ だったら (つまり，$\boldsymbol{x < 3}$ だったら)，
左辺の絶対値記号が外れて，$-(x-3)<5$ となるから，$-x+3<5$ より，$x>-2$
今，$x<3$ という前提で考えていたから，それを合わせると $-2<x<3$
以上 2 つの場合から，$-2<x<3$，$3 \leqq x < 8$
これは範囲としてつながっているので，まとめると $\underline{-2<x<8}$ (答)

【場合分け法の欠点】
単純な絶対方程式・不等式のときは，かえってややこしくなってしまう。
【場合分け法の利点】
どんなに複雑で変わった形の絶対方程式・不等式でも解くことができる。万能な方法。

問題 1　絶対不等式 $|x-3|>5$ を，このプリントで紹介した 3 つの方法を使って解け。