数学牧場

必要・十分条件

真・偽が断定できる文章を**命題**という。例えば「$10>3$ である」は命題だが,「10 は大きな数である」は命題ではない。

2 つの命題 p, q があるとき，これを組み合わせて「$p \Longrightarrow q$ (p ならば q)」という，新しい命題を考える。

例えば，p が「$a=10$」，q が「$a>3$」だとすると，$p \Longrightarrow q$ は真だが，$p \Longleftarrow q$ は偽である。

以上の予備知識を基に，必要条件・十分条件を定義する。

必要条件・十分条件

$p \Longrightarrow q$ が真のとき，
　p は (q であるための) **十分条件**，　q は (p であるための) **必要条件**
であるという。

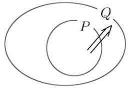
例 1　(1) p が「$a=10$」，q が「$a>3$」のとき，$p \Longrightarrow q$ は真だから，
　p は (q であるための) 十分条件，q は (p であるための) 必要条件
である。

(2) p が「$x \geqq 0$」，q が「$1<x<2$」のとき，$p \Longleftarrow q$ は真だから，
　p は (q であるための) 必要条件，q は (p であるための) 十分条件
である。

p, q の条件が，集合として表現できる場合は，次の考え方が使える。

集合の包含関係と命題の真偽

命題 p を表す集合を P，命題 q を表す集合を Q とするとき，
「$P \subset Q$」であれば「$p \Longrightarrow q$ が真」である。

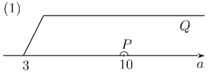


例 2　上の**例 1** において，

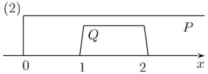
(1) p が「$a=10$」，q が「$a>3$」のとき，
　$P \subset Q$ なので，$p \Longrightarrow q$ は真。

(2) p が「$x \geqq 0$」，q が「$1<x<2$」のとき，
　$P \supset Q$ なので，$p \Longleftarrow q$ は真。

(1)



(2)



問題 1　次の命題 p は，q であるための何条件か。

(1) p :「n は 3 の倍数」，　q :「n は 6 の倍数」

(2) p :「$|x-1|<3$」，　q :「$(x+2)(x-4)<0$」

(3) p :「$x=4$」，　q :「$x^2-3x-4=0$」

(4) p :「$a+b>2$」，　q :「$a>1$ かつ $b>1$」

p, q の条件が，集合として表現できない (しにくい) 場合は，次の 2 通りの方法で調べていく。

式変形・同じ意味の表現に変える

例 3　(1) p が「$x^2=0$」，q が「$|x|=0$」のとき，
　$p \to$「$x=0$」，　$q \to$「$x=0$」と表現を変えて考え直す。

(2) p が「m が奇数でない，または n が偶数でない」，q が「mn が奇数」のとき，
　$p \to$「m が偶数，かつ n が奇数」と表現を変えて考え直す。

反例を考える

例 4　p が「$x+y<0$」，q が「$xy<0$」のとき，

[$p \Rightarrow q$] 足した数が負 ($x+y<0$) なのに，かけた数が負にならない ($xy<0$ でない) 例を考える。

[$p \Leftarrow q$] かけた数が負 ($xy<0$) なのに，足した数が負にならない ($x+y<0$ でない) 例を考える。

もし，1 つでも反例が見つかれば，その命題は偽である。

問題 2　次の命題 p は，q であるための何条件か。

(1) p :「x と y が整数」，　q :「$x+y$ が整数」

(2) p :「$ab+1=a+b$」，　q :「$a=1$ かつ $b=1$」

(3) p :「a と b がともに無理数」，　q :「$a+b$ と ab の少なくとも一方が無理数」