数学牧場

相加平均・相乗平均の大小関係

相加平均

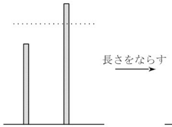
小学校以来学習してきた「足して，個数で割る」ことによって求めた平均を**相加平均**という。いわゆる普通の「平均」のことである。

例 1

(1) 6 と -7 の相加平均は　$\dfrac{6+(-7)}{2}=-0.5$

(2) 30 と 42 と 57 の相加平均は　$\dfrac{30+42+57}{3}=43$

※ 相加平均は，長さの違ういくつかの棒を，すべて同じ長さになるよう均等に「ならした」ときの数値だと考えることができる。(もちろん，これは正の数の場合に限った説明である)



《相加平均》

相乗平均

通常の平均とは異なり「掛けて，個数だけの累乗根をとる」ことによって求めた平均を**相乗平均**という。

例 2

(1) 48 と 27 の相乗平均は　$\sqrt{48\times 27}=\sqrt{1296}=36$

(2) 2 と -8 と 32 の相乗平均は　$\sqrt[3]{2\times(-8)\times 32}=\sqrt[3]{-512}=-8$

※ 2 つの数の相乗平均は，ある面積をもった図形を，同じ面積の正方形になるように「ならした」ときの数値だと考えることができる。3 つの数の相乗平均の場合は，同じ体積をもった立方体に「ならす」と考えられる。(もちろん，これは正の数の場合に限った説明である)

《相乗平均》

相加平均・相乗平均の大小関係

いくつかの数に対して相加平均，相乗平均をとると，原則として相加平均のほうが大きくなる。
ただし平均をとる数の中に，負の数があってはならない。

例 3

(1) 48 と 27 について，相加平均は $\dfrac{48+27}{2}=37.5$　相乗平均は $\sqrt{48\times 27}=36$ ………………… ◎

(2) 4 と 16 と 8 について，相加平均は $\dfrac{4+16+8}{3}=9.333\cdots$　相乗平均は $\sqrt[3]{4\times 16\times 8}=8$ ……. ◎

(3) 7 と 7 について，相加平均は $\dfrac{7+7}{2}=7$　相乗平均は $\sqrt{7\times 7}=7$ …………………………… △

(4) -9 と -81 について，相加平均は $\dfrac{(-9)+(-81)}{2}=-45$　相乗平均は $\sqrt{(-9)\times(-81)}=27$ ….. ×

(5) -9 と 6 について，相加平均は $\dfrac{(-9)+6}{2}=-1.5$　相乗平均は計算できない !!　……………… ×

では 2 つの数の平均をとる場合についてのみ，次のようにまとめておこう。

● 相加平均・相乗平均の大小関係 ●

> 2 つの正の数 a，b (0 でもよい) の相加平均と相乗平均を比較すると，相加平均のほうが大きい。
> ただし，$a=b$ のときは，相加平均と相乗平均は等しくなる。

左下の例 3 で見たように，平均をとる数が負だとこの関係は成り立たない。また，同じ数の平均をとると，相加平均＝相乗平均となる。

では以上のことを，教科書式に表現しておこう。

● 相加平均・相乗平均の大小関係 ●

> $$a\geqq 0,\ b\geqq 0 \text{ のとき，} \quad \boldsymbol{\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}}$$
> 等号成立は，$a=b$ のとき。

「$a\geqq 0$，$b\geqq 0$」という条件がついている理由は先に触れた。太字の不等式の左辺が「相加平均」，右辺が「相乗平均」である。原則として相加平均のほうが大きくなるのだが，不等式にはイコールがついている。つまり，等号が成立する場合もあって，それが a と b が等しいときである，といっている。

この関係を使うときは，不等式の左辺の分母を払って $\boldsymbol{a+b\geqq 2\sqrt{ab}}$ の形で使うことが多い。

$$\boxed{\square+\triangle\geqq 2\sqrt{\square\triangle}}$$

という形で覚えておこう。この□と△の部分には，0 以上のものなら何を入れてもよい。

例 4　$a>0$ のとき，$2a+\dfrac{3}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$2a=\square$，$\dfrac{3}{a}=\triangle$ と考えよう。□も△も正だから，上の関係に当てはめると

$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{3}{a}}$　　これより，$2a+\dfrac{3}{a}\geqq 2\sqrt{6}$

等号が成り立つのは，□＝△，つまり $2a=\dfrac{3}{a}$ のとき。　$a>0$ だから，$a=\dfrac{3}{2}$ である。

問題1　$t>0$ のとき，$t+\dfrac{1}{t}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

問題2　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，$2ab+\dfrac{1}{ab}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

問題3　$a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4$ であることを証明せよ。