2年数学予習シート　■複素数とその演算■　2 − 1

複素数

有理数とは，________(どんな？) 数であり，無理数とは ________ な数である。有理数と無理数を合わせた数を ________ という。

$ax + b = 0$ という形をした 1 次方程式が「解なし」となることはないが，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ のときは，「解なし」となる場合があった。それは，判別式 D について，$D \boxed{\phantom{<}} 0$ が成り立つときである。

簡単な例で言えば，2 次方程式

$$x^2 = 1$$

は解をもつが ($x = \pm 1$)，

$$x^2 = -1$$

は解をもたない。2 つ目の方程式が解をもたないのは，**2 乗して −1 になる実数が存在しないから**である。

そこで，2 乗して −1 になるような**新しい数**を 1 つ考える。これを ________ と書き，**虚数単位**と呼ぶ。つまり，$\boldsymbol{i^2 = -1}$ となる数を考えることになる。

この新しい数を，実数と組み合わせてできる $2i$，$5 + 3i$，$\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}i$ のような数を，すなわち

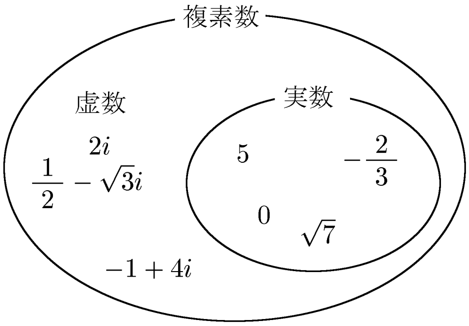
$$a + bi \qquad (a,\ b \text{ は実数})$$

の形で表される数を考え，これを ________ という。a をその ________ といい，b をその ________ という。

とくに $b = 0$ のときは，$a + 0i = a$ と表すことにすると，実数は複素数の特別な場合であって，実数の集合は複素数の集合に含まれることになる。

$b \neq 0$ のとき，複素数 $a + bi$ は実数ではない。このような複素数を ________ という。

とくに $a = 0$ のときは，$0 + bi = bi$ となり，この形の虚数を ________ という。



次の条件を満たすとき，複素数は**等しい**という。

● 複素数の相等 ●

a，b，c，d が実数のとき，

$$\boldsymbol{a + bi = c + di \iff a = c,\ \ b = d}$$

とくに，

$$\boldsymbol{a + bi = 0 \iff a = 0,\ \ b = 0}$$

問題1　次の等式を満たす実数 a，b の値を求めよ。　(吉教科書 p.69　問 1)

(1) $(a + 3) + (b - 1)i = 0$　　(2) $(a + b) + (a - b)i = 1 + 5i$

複素数の計算

複素数の四則演算では $a+bi$ を，通常の文字式 $a+bx$ のように扱って計算し，i^2 が出てきたら -1 に置き換える。

例 1 **和**　$(1+3i)+(2+4i)=3+7i$　　**差**　$(5+3i)-(3-2i)=2+5i$

積　$(3+2i)(2-i)=6+(-3+4i)i-2\boldsymbol{i^2}$
$=6+i-2\cdot(\boldsymbol{-1})$
$=8+i$

累乗　$(1+3i)^2=1+6i+9\boldsymbol{i^2}$
$=1+6i+9\cdot(\boldsymbol{-1})$
$=-8+6i$

問題2 次の計算をせよ。　(吉教科書 p.69　問 2，3)

(1) $(2+3i)+(-8+2i)$　(2) $(4-3i)-(-1-2i)$　(3) $(\sqrt{2}i)^2$
(4) $(-\sqrt{2}i)^2$　(5) $(2-i)(1+4i)$　(6) $(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i)$

複素数 $\alpha=a+bi$ に対して，虚部の符号を変えた複素数 $a-bi$ のことを，α の ________________ といい，$\boldsymbol{\overline{\alpha}}$ とかく。

問題3 次の複素数と共役な複素数をいえ。　(吉教科書 p.70　問 4)

(1) $2+3i$　(2) $-1-\sqrt{5}$　(3) $\sqrt{2}i$　(4) -7

(**ヒント**：(3) は $0+\sqrt{2}i$，(4) は $-7+0i$ と見ることができる)

例 2 分母に複素数があるときは，その共役複素数を分子と分母の両方にかけて，分母を実数にする。

商　$(3+4i)\div(1+2i)=\dfrac{3+4i}{1+2i}=\dfrac{(3+4i)\boldsymbol{(1-2i)}}{(1+2i)\boldsymbol{(1-2i)}}=\dfrac{3-2i-8i^2}{1-4i^2}=\dfrac{11-2i}{5}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}i$

問題4 次の計算をせよ。　(吉教科書 p.70　問 5)

(1) $\dfrac{1}{i}$　(2) $\dfrac{3+i}{2i}$　(3) $\dfrac{2+i}{2-i}$　(4) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}i}$

複素数の四則演算について，２つの複素数の和，差，積，商は，また複素数となる。
また，実数の場合と同様に，加法，乗法について，交換法則，結合法則，分配法則が成り立つ。
さらに，複素数 α，β についても，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\alpha\beta=0 \text{ ならば } \alpha=0 \text{ または } \beta=0}$$

なお，**複素数においては，大小関係は考えない。**