※教科書とは別の方法で説明します。

解と係数の関係

2 次方程式は複素数の範囲で考えれば，必ず 2 つの解をもつ。（重解は同じ数が 2 つある，と考える）
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ … ①　の解を α，β とすると，この 2 次方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

と因数分解されるはずである。これを展開してみると $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ … ②　となる。
①，②は同じ方程式でなければならないから，係数は等しくなるはずで，
$b=-a(\alpha+\beta)$，　$c=a\alpha\beta$
つまり，次のことがいえる。

● 解と係数の関係 重要 ●

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

※ この関係式の凄いところは，方程式を解かなくても，2 つの解の和と積が，方程式を見ただけで読み取れるということである。

例 1 $2x^2+3x-4=0$ の解の和は $-\dfrac{3}{2}$，　解の積は $\dfrac{-4}{2}=-2$

本当かどうか，確かめてみる。(今後は，この作業は不要)

[確かめ]　解の公式より，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$

よって解の和は　$\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}+\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

解の積は　$\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}\times\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}=\dfrac{(-3)^2-(\sqrt{41})^2}{16}=\dfrac{9-41}{16}=\dfrac{-32}{16}=-2$

※ 式を見ただけで解についての情報が読み取れるため，この関係式は非常に応用が広い。しっかり押さえておいて欲しい。

問題 1　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。 (吉教科書 p.78　問 15)

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2) $(\alpha-\beta)^2$　　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

問題2 2 次方程式 $x^2 - kx + k + 2 = 0$ の 1 つの解が，他の解より 2 だけ大きいとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの解を求めよ。

(吉教科書 p.78　問 16)

2 次方程式の解の符号

2 つの実数 α，β について，

α，β がともに正 …… $\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

α，β がともに負 …… $\alpha + \beta < 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

α，β が異符号 …… $\alpha\beta < 0$

がいえる。これらの関係は，次のような問題に応用される。

問題3 2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ の解が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(吉教科書 p.79　問 17)

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ

(3) 異符号の解をもつ

ヒント：解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 2a$，$\alpha\beta = a + 6$。(1) の場合であれば，$\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$ となればよいので，これらの連立不等式を解けばよい。