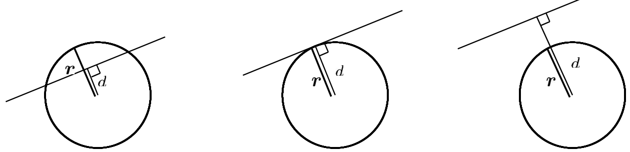
数学牧場

円の位置関係

△▼△

円と直線の位置関係

円の中心から直線までの距離を d，円の半径を r とするとき，次のことが成り立つ。



[交わる]	[接する]	[離れている]
$\boldsymbol{d<r}$	$\boldsymbol{d=r}$	$\boldsymbol{d>r}$

例 1 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ と直線 $2x-y+1=0$ について，

中心 $(1,\ -2)$ と直線の距離は $d=\dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$，　円の半径は $r=3$

よって $d<r$ であるから，この円と直線は交わる。

問題1 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ と直線 $x+3y+a=0$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。同じく，離れているとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

※円と直線の位置関係を調べるとき，次の方法で判別式を利用することもできる。上の例 1 の場合，円 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ と直線 $2x-y+1=0$ の共有点を求めると，

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=9\\ y=2x+1\end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+(2x+1+2)^2=9 \Rightarrow \boxed{5x^2+10x+1=0}\cdots①$$

①を解くと，共有点の x 座標が求められる。ということは，①が異なる 2 つの実数解をもつとき，円と直線は交わり，①が重解をもつときは接し，①が実数解をもたないときは離れているといえる。

①の判別式 ➔ $D'=5^2-5\cdot 1=20>0$ ➔ ①が異なる 2 つの実数解をもつ。 ➔ **交わる**

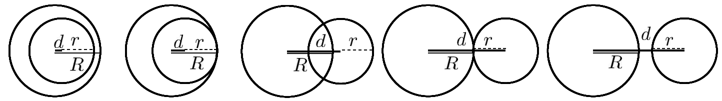
以上のことをまとめると，次のようになる。

円の方程式と直線の方程式から y を消去した 2 次方程式の判別式 D について，

$\boldsymbol{D>0}$ ならば，**交わる**　　$\boldsymbol{D=0}$ ならば，**接する**　　$\boldsymbol{D<0}$ ならば，**離れている**

2 円の位置関係

2 円の中心間の距離を d，大きい円の半径を R，小さい円の半径を r とするとき，次のことが成り立つ。



[交わる]	[内接する]	[交わる]	[外接する]	[離れている]
$\boldsymbol{d<R-r}$	$\boldsymbol{R-r=d}$	$R-r<d<R+r$	$\boldsymbol{d=R+r}$	$\boldsymbol{R+r<d}$

例 2 2 つの円 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ と $x^2+(y-1)^2=1$ について，

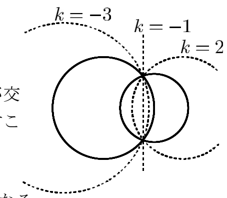
2 円の中心 $(1,\ -2)$ と $(0,\ 1)$ の間の距離は $d=\sqrt{10}$，　2 円の半径は $R=3$，$r=1$

$3-1<\sqrt{10}<3+1$，すなわち $R-r<d<R+r$ であるから，この 2 円は交わる。

※ 2 円の位置関係を調べる際は，判別式を利用するのは難しい。

問題2 2 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，$(x+2)^2+y^2=r^2$ が内接するとき，r の値を求めよ。同じく離れているとき，r の値の範囲を求めよ。

2 円の交点を通る直線・円



2 つの円 $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$，$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$ が交わっているとき，その交点を通る円は無数にあり，全て以下の式で表すことができる。

$$\boxed{x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1+\boldsymbol{k}(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)=0}$$

この式の形からも分かる通り，特に $k=-1$ のとき，交点を通る直線になる。

問題3 2 つの円 $x^2+y^2-4x+6x+15=0$，$x^2+y^2-2x+8=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 2 つの円が交わることを確認せよ。

(2) 2 つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3) 2 つの円の交点を通り，さらに点 $(-1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。