導関数　$f(x)=x^2-7x+4$ の，$x=a$ における導関数は次のように求められる。

$f(a+h)-f(a)=\{(a+h)^2-7(a+h)+4\}-(a^2-7a+4)=(2a-7)h+h^2$ だから，

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2a-7)h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2a-7+h)=2a-7$$

よって，$f'(a)=2a-7$。この式に $a=1,\ 2,\ 3$ などを代入すれば，微分係数は求められるので，ひとつひとつ計算する手間が省ける。

問題1　関数 $f(x)=x^2-1$ について，次の問いに答えよ。　(吉教科書 p.117　問 10)

(1) $f'(a)$ を求めよ。　(2) $f'(3)$，$f'(0)$，$f'(-1)$，$f'(-5)$ を求めよ。

先ほどの微分係数 $f'(a)=2a-7$ は，a を変数とする関数と見ることができる。そこで a を x に置き換えた式 $f'(x)=2x-7$ を，関数 $f(x)=x^2-7x+4$ の ＿＿＿＿＿＿ という。

一般に関数 $y=f(x)$ について，$x=a$ のときの微分係数 $f'(a)$ を計算し，a を x に置き換えた $f'(x)$ を，$f(x)$ の**導関数**という。導関数は，次のように計算できる。

● 導関数 ●

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

導関数を，$\boldsymbol{y'}$，あるいは $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ と書くこともある。

たとえば $y=x^2-7x+4$ の導関数は，$y'=2x-7$，$\dfrac{dy}{dx}=2x-7$ と書くことがある。

x の関数 $f(x)$ から，導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **(x について) 微分する** という。

問題2　次の関数を微分せよ。　(吉教科書 p.119　問 11)

(1) $f(x)=x^2$　(2) $f(x)=x-x^3$

導関数の計算

導関数を求めるのに毎回，公式 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して計算するのは面倒であるから，次の公式を利用しよう。

● 導関数の計算 ●

$y=x^n$について，$\boldsymbol{y'=nx^{n-1}}$　　　$y=k$(定数) について，$\boldsymbol{y'=0}$

※それぞれ証明できるか？

また，導関数について，次のような性質も確かめられる。(吉教科書 p.120〜p.121)

① k が定数のとき，$y=kf(x)$ について，$\boldsymbol{y'=kf'(x)}$

② $y=f(x)\pm g(x)$ について，$\boldsymbol{y'=f'(x)\pm g'(x)}$

以上を用いて，次のような計算が可能となる。

例 1 $y=x^3-5x^2+6x+1$ を微分する。

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^3-5x^2+6x+1)' \\
&= (x^3)'-(5x^2)'+(6x)'+(1)' && \text{$'$ は分けることができる (性質①)} \\
&= (x^3)'-5(x^2)'+6(x)'+(1)' && \text{係数は $'$ の外に出せる (性質②)} \\
&= 3x^{3-1}-5\cdot 2x^{2-1}+6\cdot 1x^{1-0}+0 && \text{$y=x^n$ の微分} \\
&= 3x^2-10x+6
\end{aligned}
$$

問題3 次の関数を微分せよ。　(吉教科書 p.121　問 14)

(1) $y=3x+5$　　(2) $y=2x^2-5x-3$　　(3) $y=10-5x-5x^2$

(4) $y=x^3+x^2-x-1$　　(5) $y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{3}$　　(6) $y=0.5x^2-0.8x+0.9$