応用問題に挑戦

数Ⅰ　2次関数の決定(解答)

■1　頂点が直線 $y=x-5$ の上にあるから，頂点の座標は $(p,\ p-5)$ とおくことができるので，求める2次関数は $y=a(x-p)^2+p-5$　… ①　と表せる。

点 $(2,\ -3)$ を通るので，$-3=a(2-p)^2+p-5$　　整理して，$a(2-p)^2=2-p$　… ②

点 $(3,\ 0)$ を通るので，$0=a(3-p)^2+p-5$　　整理して，$a(3-p)^2=5-p$　… ③

$p\neq 2$ のとき，$2-p$ は0ではないから②の両辺を $2-p$ で割って，$a(2-p)=1$

これより，　$a=\dfrac{1}{2-p}$　③に代入すると，$\dfrac{(3-p)^2}{2-p}=\dfrac{5-p}{2-p}$

分母をはらい，$(3-p)^2=(5-p)(2-p)$

$$9-6p+p^2=10-7p+p^2 \qquad \therefore p=1$$

これより，$a=1$ となる。この場合，求める2次関数は $y=(x-1)^2-4$。$(y=x^2-2x-3)$

$p=2$ のとき，③より $a=3$ だから，2次関数は $y=3(x-2)^2-3$ と求まる。
これは問題の条件を満たしているので，答えとして認めてよい。ゆえに，もう1つの答えは
$y=3(x-2)^2-3$。$(y=3x^2-12x+9)$

注：②より $a(2-p)^2-(2-p)=0$ なので，左辺を因数分解すると　$(2-p)a(2-p)-1=0$
このことから自動的に $2-p=0$ の場合と，$a(2-p)-1=0$ の場合とに分かれる，と考えることもできます。

注：今回は②の両辺が $2-p$ で割れたので，比較的簡単に解くことができましたが，一般には片方の式を「$a=\cdots$」の形に変形し，他方の式に代入して解かなければなりません。3次方程式になりますし，分母についての場合分けも必要ですから，かなり難易度は高くなります。

■2　それぞれのグラフの頂点を求めると，

$y=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　　頂点は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

$y=x^2-3x+5=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$　　頂点は　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{4}\right)$

よって，$p=\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$，　$q=\dfrac{11}{4}-\dfrac{3}{4}=2$

（別解）平行移動の性質を利用してもできる。

$\boxed{y=f(x) \text{ のグラフを } x \text{ 軸方向に } p,\ y \text{ 軸方向に } q \text{ だけ平行移動すると，} y-q=f(x-p)}$

$y=x^2+x+1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると

$$y-q=(x-p)^2+(x-p)+1$$

整理して，$y=x^2+(1-2p)x+(p^2-p+q+1)$

これが $y=x^2-3x+5$ と一致するから，$1-2p=-3$，　$p^2-p+q+1=5$

よって，$p=2$，$q=2$