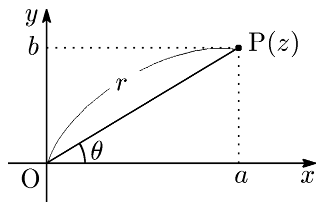
複素数の極形式



複素数平面上で，0 でない複素数 $z = a + bi$ を表す点を P とする。
このとき，右の図のように，OP の長さを r，OP と実軸の正の向きとのなす角を θ とすると，

$$\frac{a}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{b}{r} = \sin\theta$$

であるから，

$a =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿，　$b =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ と表される。このことより，複素数 z は，

$$z = a + bi = r\cos\theta + (r\sin\theta)i = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

という形で表されることになる $(r > 0)$。これを複素数の**極形式**という。

r は複素数 z の絶対値 $|z|$ に等しいから，$r = \sqrt{\quad\quad}$

角 θ を，複素数 z の**偏角**といい，＿＿＿＿＿＿ で表す。

複素数の偏角 θ は，$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲に限定すれば，ただ 1 通りに定まる。一般には，偏角は $\theta + 360° \times n$ (n は整数)　と表す。

問題1　次の複素数を極形式で表せ。 (吉教科書 p.92　問 8)

(1) $1 + i$　(2) $-1 + \sqrt{3}i$　(3) $3 - \sqrt{3}i$　(4) $-i$　(5) 3　(6) $\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

※ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき，　$\overline{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$，　$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

積の極形式

● 積の極形式 ●

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき，

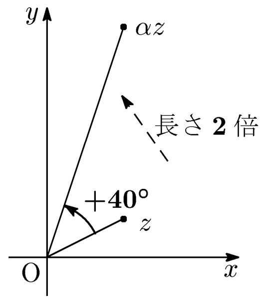
$$\boldsymbol{z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}}$$

問題2　$z_1 = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$，$z_2 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$ のとき，積 z_1z_2 を極形式で表し，その絶対値と偏角を求めよ。 (吉教科書 p.93　問 9)

例 1 複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に，別の複素数 $\alpha=2(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$ を掛けると，

$$\alpha z=2r\{\cos(\theta+40^\circ)+i\sin(\theta+40^\circ)\}$$

となる。絶対値は $2r$ に，偏角は $\theta+40^\circ$ になっている。つまり，α を掛けることにより，z は 40° 回転し，さらに原点からの長さが 2 倍になったことになる。



● 複素数の積の図形的意味 ●

複素数 z に複素数 α を掛けると，z は $|\alpha|$ 倍に伸び (縮み)，原点を中心に $\arg\alpha$ だけ回転する。

特に，z に $\boldsymbol{i}$ **を掛けると**,$i=1(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$ であることから，z は 1 倍に伸び (つまり長さは変わらず)，**原点を中心に 90°回転する。**

問題3 $\alpha=1+\sqrt{3}i$ のとき，次の z に対して，積 αz を作図せよ。　(吉教科書 p.94　問 10)

(1) $z=1$　　(2) $z=2i$　　(3) $z=\sqrt{3}-i$

問題4 $z=1+i$ とするとき，点 z を原点のまわりに 60°，および -90° 回転した点を表す複素数を求めよ。　(吉教科書 p.94　練習 3)

商の極形式

● 商の極形式 ●

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$$

問題5 $z_1=-1+\sqrt{3}i$，$z_2=1+i$ のとき，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ。　(吉教科書 p.95　問 12)