

ド・モアブルの定理

複素数を n 乗すると、偏角が n 倍される。

● ド・モアブルの定理 **重要** ●

$$n \text{ が整数のとき, } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

※上の定理が成り立つことを説明せよ。

問題 1 次の計算をせよ。

(吉教科書 p.97 問 13)

(1) $(1+i)^8$

(2) $(-1+\sqrt{3}i)^6$

(3) $(\sqrt{3}-i)^{-8}$

1の n 乗根

n を自然数とすると、方程式 _____ の解を、1の n 乗根 という。

例 1 1の 3 乗根

1の 3 乗根は、 $z^3 = 1$ をみたく。

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) … ① とおくと、ド・モアブルの定理より

$$(\text{左辺}) = z^3 = r^3(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$(\text{右辺}) = 1 = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

よって①より、 $r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

両辺を比較して、 $r^3 = 1, \quad 3\theta = 0^\circ + 360^\circ \times k$ (k は整数)

つまり、 $r = 1, \quad \theta = 0^\circ + 120^\circ \times k$

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ だから、 $k = 0, 1, 2$ 。すなわち、 $\theta = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ 。

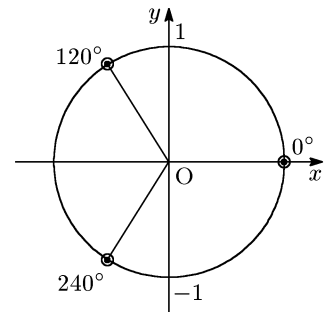
よって①より、

$$z = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ),$$

$$1 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ),$$

$$1 \cdot (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ),$$

$$\therefore z = 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$



※1の 3 乗根は、右の図のように、複素数平面の単位円周上に均等に並んでいる。

一般に、1 の n 乗根は複素数平面の単位円周上に、 0° の位置を出発点として、均等に並んでいる。

● 1 の n 乗根 ●

1 の n 乗根は、 $w_k = \cos\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right) + i \sin\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$)

これらは原点を中心とする半径 1 の円周上にあり、点 1 を 1 つの頂点とする正 n 角形の頂点である。

問題 2

(1) 1 の 8 乗根を求めよ。

(吉教科書 p.99 問 15)

(2) 8 の 3 乗根を求めよ。

(吉教科書 p.99 練習 4)

問題 2

次の方程式を解け。

(吉教科書 p.99 問 16)

(1) $z^2 = i$

(2) $z^4 = -16$

(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$