## 無限等比数列の極限

一般項が $a_n = r^n$ となる無限数列は，$a_n = r \cdot r^{n-1}$ と変形できるから，初項 $\underline{\qquad}$ ，公比 $\underline{\qquad}$ の等比数列である。

- $r = 2$ のとき，$a_n = 2^n$ で，その極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n =$ $\underline{\qquad\quad}$ となり，$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ する。
- $r = 1$ のとき，$a_n = 1^n = 1$ で，その極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ となり，収束する。
- $r = \dfrac{1}{3}$ のとき，その極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n =$ $\underline{\qquad\quad}$ となり，$\underline{\qquad\qquad}$ する。
- $r = -\dfrac{1}{2}$ のとき，その極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n =$ $\underline{\qquad\quad}$ となり，$\underline{\qquad\qquad}$ する。
- $r = -1$ のとき，$\{a_n\}$ は $\underline{\qquad\qquad}$ する。
- $r = -2$ のとき，$\{a_n\}$ は $\underline{\qquad\qquad}$ する。

一般に，無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について，次のことがいえる。

### ● $\{r^n\}$ の極限 ●

1. $r > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
2. $r = 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 1$
3. $|r| < 1$(つまり $-1 < r < 1$) のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
4. $r \leqq -1$ のとき，**$\{r^n\}$ は振動する。**

**問題1** 次のような一般項をもつ数列の極限を調べよ。 (➡教科書 p.37 問 8)

(1) $(-3)^n$ (2) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}$ (3) $\dfrac{(\sqrt{5})^n}{2^n}$ (4) $-3\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

**問題2**　次の極限を調べよ。 (➡教科書 p.37　問 9)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^{2n}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{1+2^n}$

**問題3**　次の数列の極限を調べよ。 (➡教科書 p.38　問 10)

(1) $\left\{\dfrac{1}{1+r^n}\right\}$　ただし，$r \fallingdotseq -1$　　(2) $\left\{\dfrac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}\right\}$

先にまとめたことから，次のことがいえる。

$$\textbf{数列 } \{r^n\} \textbf{ が収束する} \iff -1 < r \leqq 1$$

つまり，**公比が $-1 < r \leqq 1$ である等比数列は収束する**ということである。

**問題4**　数列 $\{2(x+1)^n\}$ が収束するような $x$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。 (➡教科書 p.38　問 11)

**問題5**　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 (➡教科書 p.39　問 12)

$$a_1 = 2,\qquad a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 4\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$