無限等比級数

無限等比数列から作られる無限級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ を，初項 a，公比 r の**無限等比級数**という。この無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の収束，発散について調べよう。

(Ⅰ) $a=0$ のとき，この無限等比級数は ＿＿＿＿＿＿ して，和は $\boxed{}$ である。

(Ⅱ) $a \neq 0$ のとき，部分和を S_n とすると，

$$S_n = \begin{cases} a+ar+\cdots\cdots+ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ a+a+\cdots\cdots+a = na & (r=1) \end{cases}$$

部分和 S_n には「r^n」という式が含まれているから，r の値によって収束・発散が決定する。

〔**1**〕$|r|<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$ であるから，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} =$ ＿＿＿＿＿＿

〔**2**〕$|r|>1$ または $r=-1$ のとき

数列 $\{r^n\}$ は発散するので，数列 $\{S_n\}$ も発散する。

〔**3**〕$r=1$ のとき

$S_n = na$ で，$a \neq 0$ だから，数列 $\{S_n\}$ は ＿＿＿＿＿＿ する。

以上のことから，次のことが成り立つ。

● 無限等比級数の収束・発散 ●

$a \neq 0$ のとき，無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ は，

- $|r|<1$ のとき，収束し，その和は $\boldsymbol{\dfrac{a}{1-r}}$ である。
- $|r| \geqq 1$ のとき，発散する。

問題1 次の無限等比級数は収束するか。収束するときはその和を求めよ。 (➡教科書 p.44　問 4)

(1) $27+9+3+1+\cdots\cdots$　　(2) $2-4+8-16+\cdots\cdots$

(3) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}+\cdots\cdots$　　(4) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+\cdots\cdots$

問題2　教科書 p.45 の例題 1 で，円 O_1，円 O_2，円 O_3，…… の周の長さの総和を求めよ。(➡教科書 p.45　練習 1)

==

[MEMO]