関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくことを，$x \to a$ のとき，$f(x)$ はαに ______ といい，次のように表す。

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad \text{または，} \quad x \to a \text{ のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

このとき，α を，$x \to a$ のときの $f(x)$ の ______ という。

問題1 次の極限値を求めよ。 (吉教科書 p.50　問 1)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\sqrt{2x+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}3^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log_2(3x+1)$

x の値が限りなく大きくなることを，$x \to \infty$ または $x \to +\infty$，逆に，負であって絶対値が限りなく大きくなることを $x \to -\infty$ で表す。

問題2 次の極限値を求めよ。 (吉教科書 p.50　問 2)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2-3x+2}{2x^2+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to \infty}\frac{2x^3+x-1}{3x^3+x^2}$

関数の極限値についても，数列の場合と同様に，次のことがいえる。

● 極限値の性質 ●

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき，

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\{hf(x)+kg(x)\} = h\alpha + k\beta$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　ただし，$\beta \neq 0$
4. $f(x) \leqq g(x)$ ならば，$\alpha \leqq \beta$
5. $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

関数 $f(x)$ において，$x \to a$ のとき，$f(x)$ が限りなく大きくなる場合，$f(x)$ は**正の無限大に発散する**といい，次のように表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{または，} \qquad x \to a \text{ のとき} \quad f(x) \to \infty$$

同様に，**負の無限大に発散する**場合も考えられる。

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \text{または，} \qquad x \to a \text{ のとき} \quad f(x) \to -\infty$$

問題3　次の極限値を求めよ。　(吉教科書 p.51　問 3)

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\log_2 x}{x+1}$　(2) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{3}{x^2}\right)$　(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

問題4　次の極限値を求めよ。　(吉教科書 p.52　問 4)

(1) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} (x^3 - 5x^2 - 10x)$　(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$　(3) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x}{(x-2)^2}$

分母が0に収束する場合の極限

分母が 0 に収束する関数も，収束する場合がある。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+1}=4$$

上の例の場合，分母が 0 になる原因は，分母に含まれる $(x-2)$ という因数である。

分母が 0 になる原因である $(x-2)$ が消えなければ，全体は収束しない。つまり，全体が収束するためには分子も $(x-2)$ で割り切れなければならない。

● $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の収束 ●

$$\lim_{x\to a}g(x)=0 \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\text{定数}) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=0$$

問題1 次の極限値を求めよ。　(吉教科書 p.52　問 5)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+1}$

問題2 次の極限値を求めよ。　(吉教科書 p.52　問 6)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

問題3 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+k}-1}{x-2}$ が有限な値になるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ。(吉教科書 p.53　問 7)