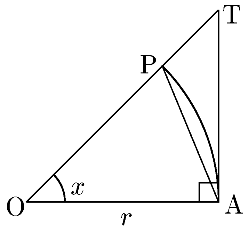
$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限　三角関数の極限について，次の式は重要である。

● $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限 重 要 ●

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

[証明] $x\to 0$ のときを考えるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ という制限をつけても問題は起こらない。



右の図から分かるように，面積について

$$\triangle \mathrm{OAP} < (\text{扇形 OAP}) < \triangle \mathrm{OAT}$$

であるから，それぞれ面積を求めて

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} < \frac{1}{2}r^2x < \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

したがって，$\sin x < x < \tan x$

$\underline{\qquad\qquad\qquad}$ だから，各辺を $\sin x$ で割って，$\dfrac{\sin x}{\sin x}<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\tan x}{\sin x}$

$\therefore 1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$　　逆数をとって，$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=\boxed{}$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　□

この式は，「角度が 0 に近い値だと，$\sin x \fallingdotseq x$ になる」といっている。例えば $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ であるが，

$$\frac{\pi}{180}=0.01745329\cdots \quad,\quad \sin\frac{\pi}{180}=0.01745240\cdots$$

のように，$\sin\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq\dfrac{\pi}{180}$ となっている。

問題1 次の極限値を求めよ。 (➔教科書 p.58　問 14)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

問題2　変数を [　] 内に示されたようにおきかえて，次の極限値を求めよ。　(➡教科書 p.58　問 15)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ $[\theta=x-\pi]$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\left[\theta=x-\frac{\pi}{2}\right]$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$ $\left[t=\frac{1}{x}\right]$

問題3　点 O を中心とする半径 a の円周上に，定点 A と動点 P がある。A におけるこの円の接線に P から下ろした垂線の足を Q とする。　(➡教科書 p.59　問 16)

(1) $\angle$ AOP $=x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ として，AQ，PQ を a と x で表せ。

(2) P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{PQ}}$ の極限値を求めよ。